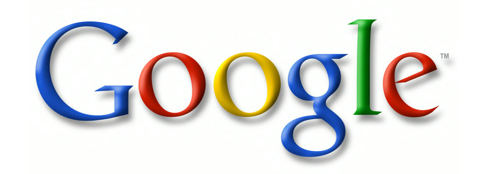
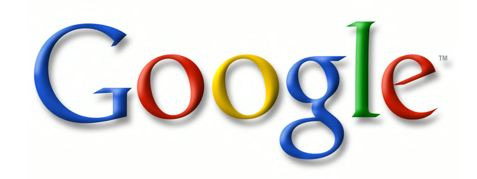
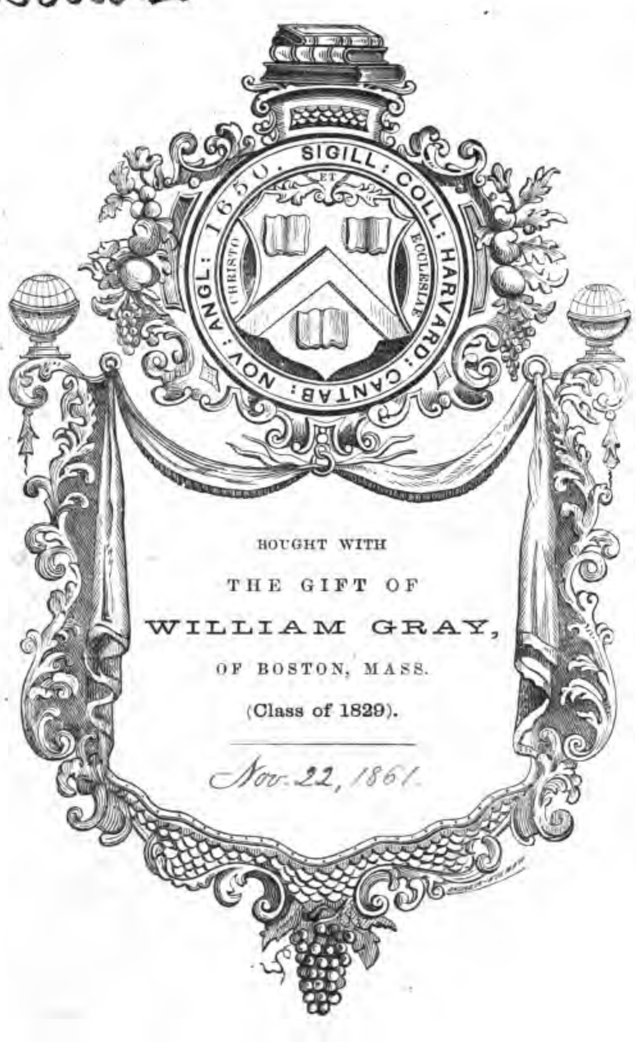







SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1859.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,
Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie,
Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,
Professeur de Mathématiques.

TOME DIX-HUITIÈME
AUGMENTÉ D'UN
BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE
ET DE
BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

A PARIS,
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,
Quai des Augustins, n° 55.

1859

1861, Nov. 22.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir t. XVII, p. 307);

PAR M. VANNSON.

Propriétés des tangentes.

L'équation de la tangente sera

$$\frac{yy'}{b^2}+\frac{xx'}{a^2}=1.$$

Étant donnée une circonférence de grand cercle $y=Ax+B$, si on demande la condition pour qu'elle soit tangente à l'ellipse, on écrira que les deux équations sont identiques, ce qui conduira à la condition

$$B=\pm\sqrt{A^2a^2+b^2}.$$

L'équation d'une tangente pourra donc se représenter par la formule

$$y=Ax\pm\sqrt{A^2a^2+B^2}.$$

Si on cherche la rencontre des deux lignes ainsi représentées, on trouvera qu'elle a lieu à 90 degrés de l'origine ou du centre en un point dont la latitude a pour tangente

A (*voyez* la tangente au cercle). Le signe + se rapporte à la tangente LC située au-dessus du diamètre LO, et le signe — à la tangente LD au-dessous de LO; LO a pour équation

$$y = mx.$$

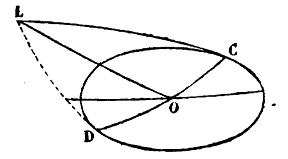
Si on mène un rayon au point de contact C, et qu'on désigne par A′ le coefficient angulaire de ce rayon, on aura

$$A' = \frac{y'}{x'};$$

donc entre ce coefficient et celui A de la tangente on a la relation

$$AA' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Fig. 1.



Soit OL le conjugué de OC et A″ son coefficient, on a aussi

$$A'A'' = -\frac{b^2}{a^2},$$

donc

$$A = A'';$$

d'où il résulte que la tangente et le diamètre OL se rencontrent à 90 degrés du centre en un point dont la latitude a pour tangente

$$A = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

On pourrait donc mener une tangente en C en menant

le diamètre OC, déterminant son conjugué (nous avons vu le moyen plus haut), prenant sur ce conjugué OL un arc égal à 90 degrés, et joignant le point obtenu au point C.

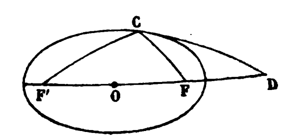
On peut aussi se servir de la relation

$$\mathrm{X} x' = a^2,$$

X étant la tangente du segment déterminé par la rencontre de la tangente avec l'axe.

Théorème. *La tangente divise en parties égales l'angle formé par un rayon vecteur mené du foyer au point de contact et le prolongement de l'autre rayon vecteur.*

Fig. 2.



Il suffit pour cela de démontrer qu'on a la relation

$$\frac{\sin \mathrm{F'C}}{\sin \mathrm{FC}} = \frac{\sin \mathrm{F'D}}{\sin \mathrm{FD}}.$$

Or, nous avons trouvé précédemment

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\mathrm{F'C} + \mathrm{FC}}{2}\right) = a \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\mathrm{F'C} - \mathrm{FC}}{2}\right) = \frac{\mathrm{C}x'}{a}.$$

Ajoutant et soustrayant membre à membre, puis divisant, on trouve

$$\frac{\sin \mathrm{F'C}}{\sin \mathrm{FC}} = \frac{a^2 + \mathrm{C}x'}{a^2 - \mathrm{C}x'};$$

d'autre part nous avons trouvé

$$\operatorname{tang} \mathrm{OD} = \frac{a^2}{x'};$$

on a d'ailleurs

$$\tang \mathrm{OF} = \mathrm{C};$$

opérant sur ces équations comme sur les précédentes, on a

$$\frac{\sin \mathrm{F'D}}{\sin \mathrm{FD}} = \frac{a^2 + \mathrm{C}x'}{a^2 - \mathrm{C}x'};$$

donc

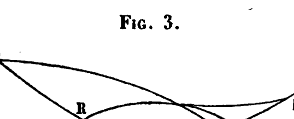
$$\frac{\sin \mathrm{F'C}}{\sin \mathrm{FC}} = \frac{\sin \mathrm{F'D}}{\sin \mathrm{FD}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela donne le moyen de mener par un point quelconque une tangente à l'ellipse, comme sur un plan.

Quand la courbe est rapportée à deux diamètres conjugués, l'équation de la tangente ne change pas de forme, c'est toujours

$$\frac{yy'}{b_i^2} + \frac{xx'}{a_i^2} = 1.$$

FIG. 3.



Si on cherche l'intersection de la tangente avec l'axe des x, on trouve

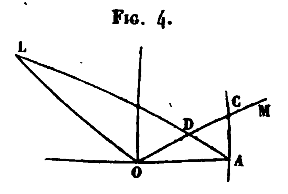
$$xx' = a_i^2;$$

d'où l'on voit que si l'on prolonge une tangente jusqu'à la rencontre d'un diamètre quelconque en P, et qu'on joigne le point du conjugué à 90 degrés de l'origine au point de contact, qu'on prolonge l'arc obtenu jusqu'au premier diamètre en D, on aura

$$\tang \mathrm{ON} \tang \mathrm{OP} = \tang^2 \mathrm{ON}.$$

Première application. *On donne dans une ellipse* a, α, α', *trouver les trois autres quantités* b, a', b' (*Voir* t. XIII, p. 169).

Fig. 4.



Soit OA = le demi-axe dont a est la tangente; j'élève au point A un arc perpendiculaire à OA, il sera tangent à la courbe. Soit C sa rencontre avec un des diamètres dont on donne la direction.

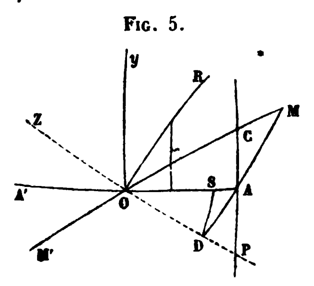
Si nous prenons sur l'autre OL = 90°, que nous menions l'arc LA qui coupe en D le diamètre OM, on aura par le théorème précédent

$$a_{\prime}^{2} = \text{tang OD tang OC}.$$

Ce qui permettra de construire le diamètre suivant OM. Le reste a déjà été exposé.

Deuxième application. *On donne* a, α, b', *trouver les trois autres quantités.*

Fig. 5.



Soient AA' l'axe donné et MOA l'angle α. J'élève au point A sur l'axe un arc perpendiculaire AC qui est tangent à la courbe. Soit OP la direction inconnue du conjugué.

Prenons OCM $=90^\circ$. Joignons MA par un arc qui coupe en D l'arc OP. Nous aurons par le théorème précédent

$$\text{tang OD tang OP} = b_{\prime}^{2}.$$

Soit mené l'arc DS perperdiculaire sur OP, nous aurons

$$\frac{\text{tang OD}}{\text{tang OS}} = \frac{\text{tang OA}}{\text{tang OP}};$$

d'où

$$\text{tang OS tang OA} = \text{tang OD tang OP} = b_{\prime}^{2}.$$

On a donc

$$\text{tang OS} = \frac{b_{\prime}^{2}}{a},$$

ce qui détermine le point S.

Mais le lieu des sommets des triangles rectangles ayant pour hypoténuse OS est une ellipse dont nous avons déjà déterminé les axes. OS est l'un des axes et l'autre β se trouve par la formule

$$\sin\beta = \text{tang}\,\frac{\text{OS}}{2};$$

la question revient donc à trouver la rencontre d'un grand cercle MA avec une ellipse dont on connaît les axes. (Problème déjà résolu.)

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que le cercle MAD coupe l'ellipse. Or celle-ci a pour équation (résultat déjà trouvé)

$$x^2 + y^2 - \text{A}x = 0,$$

A étant la tangente de OS $= \frac{b_{\prime}^{2}}{a}$. Le cercle MA passant par un point M de latitude α et par le point A a pour équation

$$y = \alpha'(x - a), \quad (\alpha' = \text{tang}\,\alpha);$$

combinant ces deux équations, on trouve par l'élimination de y,

$$(\alpha_{,}^{2}+1)x^{2}-(2a\alpha_{,}^{2}+\mathrm{A})x+a^{2}\alpha_{,}^{2}=0.$$

Pour que les racines soient réelles, il faut avoir

$$\mathrm{A}>2a\,\mathrm{tang}\left(45^{\circ}-\frac{\alpha}{2}\right);$$

d'où

$$b_{,}^{2}>2a^{2}\,\mathrm{tang}\left(45^{\circ}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ce qui donne le minimum de b'. Si on suppose pour b' sa valeur minimum, les racines sont égales et on trouve

$$x=a\sin\alpha';$$

d'où

$$y=-\alpha' a(1-\sin\alpha').$$

Si on divise y par x, on aura la tangente de l'angle AOZ compris entre la direction du diamètre b' et l'axe de la courbe a. On trouve que cet angle $\mathrm{AOZ}=\frac{\alpha'+90^{\circ}}{2}+90^{\circ}$. Ce qui démontre que la direction du diamètre b', dans le cas du minimum, est bissectrice de l'angle formé par l'axe des y et OM′ prolongement de OM. De là résulte ce théorème :

Parmi toutes les ellipses qu'on peut construire sur un axe donné, il y en a une pour laquelle le conjugué d'un diamètre OM *de direction connue est minimum, et dans cette ellipse, la direction de ce conjugué divise en parties égales l'angle formé par le second axe et le prolongement du diamètre donné* OM.

Le même théorème a lieu sur un plan.

Théorème a démontrer. *Si aux extrémités* AB *d'un*

axe, on mène deux tangentes et qu'on les coupe par une troisième aux points M *et* N, *qu'on projette* AM *et* BN *sur l'autre axe, le produit des tangentes des deux projections est égal à la tangente carrée de la moitié de cet axe, et si on multiplie* tang AM *par* tang BN, *on trouve la tangente carrée de ce même demi-axe multipliée par le cosinus carré du premier.*

La première partie de l'énoncé est encore vraie, quand on remplace les axes par un système de diamètres conjugués.

Ce théorème peut servir à résoudre le problème suivant :

On donne un des axes d'une ellipse et une tangente, trouver l'autre axe.

On peut aussi en tirer le corollaire :

Étant donné un triangle bi-rectangle ABC, si on coupe

Fig. 6.

par un arc les côtés en M et P, de manière que le produit des tangentes des segments à partir de la base soit constante $= \text{tang}^2\varphi$, la courbe enveloppe de l'arc sécant est une ellipse sphérique, dont un axe est AB et dont l'autre s'obtient en prenant $AP = BM = \varphi$, et joignant PM, l'intersection de cet arc avec la perpendiculaire Oy donne l'extrémité du second axe.

Théorème a démontrer. *Si on mène en un point* A

d'une ellipse une tangente, qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre en M, N *de deux diamètres conjugués pris pour axes, qu'on construise le demi-diamètre conjugué de celui qui passe au point* A, *la tangente carrée de la projection de ce demi-diamètre sur un des deux premiers égale le produit des tangentes des projections des deux segments de la tangente (il s'agit ici de projections obliques).*

Si au lieu de deux diamètres on prend les axes, et qu'on appelle b' la tangente du diamètre conjugué de celui qui passe au point de contact, le produit des tangentes trigonométriques des deux segments de la tangente égalera

$$b'^2 \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b.$$

Cette relation sert à résoudre le problème suivant :

Étant donnés les axes d'une ellipse non construite, lui mener une tangente telle, que le produit des tangentes des deux segments interceptés entre le point de contact et les axes soit égal à une quantité donnée P.

La relation donnera b'^2. Connaissant a, b et b', on pourra par une construction déjà faite trouver la direction du diamètre b', ainsi que la direction et la grandeur OA de son conjugué ; il suffira alors de joindre le point A à un point pris sur b' à 90 degrés de l'origine.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il ne suffit pas qu'on trouve pour b'^2 une valeur positive, il faut qu'on la trouve comprise entre a^2 et b^2. Ce qui conduit aux conditions

$$P < \sin^2 \alpha, \quad P > \sin^2 \beta,$$

α et β désignant les demi-axes. Dans le cas du maximum, la tangente sera menée par l'extrémité du petit axe et réciproquement.

Théorème. *Si des deux foyers d'une ellipse on abaisse des arcs perpendiculaires sur une tangente, le produit des sinus de ces arcs est constant et égal à* $\sin^2 6 \cos^2 \gamma$, *γ étant la distance du centre au foyer, et 6 le demi-axe perpendiculaire à l'axe des foyers.*

On sait qu'une tangente quelconque peut se représenter par l'équation

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}.$$

La distance δ du foyer à cette tangente est donnée d'après une formule ci-dessus démontrée par l'équation

$$\sin \delta = \frac{\sqrt{a^2 m^2 + h^2} + mc}{\sqrt{1 + b^2 + m^2(1 + a^2)}\sqrt{1 + c^2}},$$

l'autre distance est donnée par l'équation

$$\sin \delta' = \frac{\sqrt{a^2 m^2 + b^2} - mc}{\sqrt{1 + b^2 + m^2(1 + a^2)}\sqrt{1 + c^2}};$$

multipliant membre à membre et observant que

$$\cos a' = \cos b \cos \gamma,$$

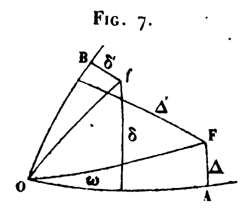
on trouve

$$\sin \delta . \sin \delta' = \sin^2 b \cos^2 c.$$

Ce théorème peut servir à trouver l'axe 6, connaissant les foyers et une tangente.

Application. On donne un foyer et deux tangentes,

Fig. 7.



trouver le lieu du second foyer. Soient F le foyer donné, Δ et Δ' ses sinus distances aux deux tangentes OA, OB, f l'autre foyer, δ et δ' les sinus des deux distances.

On aura, par le théorème précédent,

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\Delta'}{\Delta};$$

mais

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\sin fOA}{\sin(\theta-fOA)};$$

soit

$$fOA=\alpha,$$

on aura

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)};$$

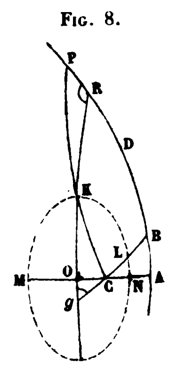
soit β l'angle FOB, on aura de même

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}.$$

D'où on conclut aisément $\alpha=\beta$; donc le lieu du point f est une circonférence de grand cercle passant à l'origine et par un point symétrique de F relativement à la bissectrice.

Corollaire. Si d'un point O on mène deux tangentes à

Fig. 8.



une ellipse et qu'on joigne le point O aux deux foyers par deux arcs de grands cercles, ces arcs feront avec les deux tangentes, des angles égaux. Si on demandait le lieu du centre qui sur un plan est une ligne droite parallèle au lieu du foyer, je dis qu'on trouverait une ellipse sphérique. Cela revient à faire voir que le lieu du milieu de l'arc variable CB terminé d'une part à un point fixe C, et d'autre part à sa rencontre B avec une circonférence AD, est une ellipse.

Posons

$$CB = 2\rho, \quad \text{tang}\, CA = p \quad \text{et} \quad BCA = \omega,$$

nous avons dans le triangle ABC,

$$p = \text{tang}\, 2\rho \cos\omega \quad \text{ou} \quad 2\,\text{tang}\,\rho \cos\omega = p(1 - \text{tang}\,\rho),$$

ou passant aux coordonnées rectangles,

$$1 - \frac{2x}{p} = y^2 + x^2.$$

C'est une ellipse dont on pourrait trouver les axes par son équation, mais on les obtient plus aisément par la géométrie. Soit N le point milieu de CA, N sera l'extrémité d'un axe. Prenons $NM = \frac{\pi}{2}$, M sera l'autre extrémité, OK perpendiculaire sur MN sera la direction du second axe. Pour en avoir l'extrémité, construisons le le triangle OCg, de manière que l'angle $g = R$. Soit K le milieu de gR, joignez CK, prolongez l'arc CK jusqu'en P, K sera, par suite d'une égalité de triangles, le milieu de CKP, donc K est un point du lieu, c'est un sommet. La courbe est alors facile à construire.

On voit donc que *quand on donne deux tangentes et un foyer, le lieu du centre est une ellipse.*

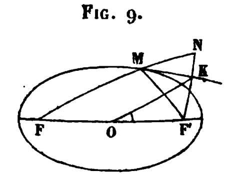
Problème. *Trouver le lieu des projections du foyer sur les tangentes.*

On peut prendre l'équation générale des tangentes

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

et celle d'une perpendiculaire abaissée du foyer sur cette tangente, puis éliminer m entre ces deux équations; mais le calcul est long et compliqué : on arrive beaucoup plus simplement au résultat par le moyen suivant : Soit MK une tangente en M; joignons le point M aux foyers par les

Fig. 9.



arcs MF, MF', prenons sur FM prolongé MN = MF', joignons NF' par un arc qui coupe la tangente en K. K est un point du lieu; j'appelle ρ la distance OK, ω l'angle KOF', et p la distance F'K ou KN dans le triangle KOF', nous aurons

$$(1) \qquad \cos p = \cos c \cos \rho + \sin c \sin \rho \cos \omega,$$

et dans le triangle NFF',

$$(2) \qquad \cos 2\alpha = \cos 2c \cos 2\rho + \sin 2c \sin 2p \cos F';$$

on a encore dans ORF'

$$\cos F' = \frac{\cos \rho - \cos p \cos c}{\sin p \sin c}.$$

Je remplace $\cos F'$ par cette expression dans l'équation (2), puis j'élimine $\cos p$ par l'équation (1), on trouve ainsi l'équation

$$\sin^2 \rho (\cos^2 c + \sin^2 c \cos^2 \omega) = \sin^2 \alpha,$$

et passant aux coordonnées rectangles

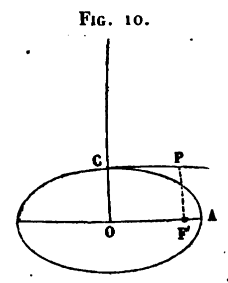
$$\frac{y^2(\cos^2 c - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Le lieu demandé est donc une ellipse concentrique à la première ayant un axe commun 2α ; l'autre axe 2β est donné par la formule

$$\operatorname{tang}^2 \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 e - \sin^2 \alpha}.$$

Si le rayon de la sphère est infini, on trouve un cercle, car $\beta = \alpha$.

Fig. 10.



Quand on a reconnu que la courbe est du second degré, on peut trouver les axes sur la figure. Il est d'abord évident que OA est un axe de la courbe. Pour avoir l'autre, au sommet C menons une tangente CP et projetons le foyer F' sur cette tangente ; l'arc F'P projetant ira couper l'axe des y en un point D à $\frac{\pi}{2} + \beta$ de l'origine ($\beta =$ OC).

Donc on a pour le point P, $y' = -\frac{1}{b}$, l'équation de l'arc F'P sera donc

$$\frac{y}{-\frac{1}{b}} + \frac{x}{c} = 1$$

(c étant la tangente de OF'). Si dans cette équation nous

faisons $y = b$, nous aurons les coordonnées du point D. Mais ces coordonnées doivent vérifier l'équation du lieu

$$\frac{y^2}{\beta'^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

il est donc facile d'avoir β ou tang β; on trouve comme par l'autre méthode

$$\text{tang}^2 \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 c - \sin^2 \alpha}.$$

Si d'un point A, pris hors d'une ellipse sphérique, on mène deux tangentes et qu'on divise en parties égales les angles qu'elles font entre elles, les deux bissectrices viennent couper l'axe en deux points tels, que le produit des tangentes de leurs distances au centre est une constante c^2 égale au carré de la demi-distance des foyers. Les tangentes ont pour équations

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}; \quad y = m'x + \sqrt{a^2 m_1^2 + \beta^2}.$$

Les bissectrices ont pour équations

$$\frac{y - mx - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + b^2 + m^2 (1 + a^2)}} = \frac{y - m'x - \sqrt{a^2 m_1^2 + b^2}}{\pm \sqrt{1 + b^2 + m_1^2 (1 + a^2)}},$$

ou

$$r(y - mx - s) = r'(y - m'x - s'),$$

en appelant r et r' les inverses des dénominateurs et s, s', les deux radicaux du numérateur. Faisant $y = 0$, on trouve

$$x = \frac{rs - r's'}{m'r' - mr};$$

pour l'autre bissectrice, il faut changer le signe de r', ce qui donne

$$X = -\frac{rs + r's'}{m'r' + mr};$$

d'où on tire

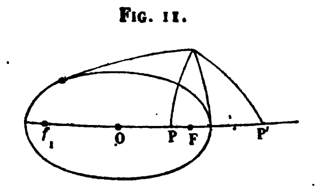
$$Xx = \frac{r_,^2 s_,^2 - r^2 s^2}{m_,^2 r_,^2 - m^2 r^2} = \frac{r_,^2 (a^2 m_,^2 + b^2) - r^2 (a^2 m_,^2 + b^2)}{m_,^2 r_,^2 - m^2 r^2}$$

$$= a^2 + \frac{b^2 (r_,^2 - r^2)}{m_,^2 r_,^2 - m^2 r^2} = a^2 + \frac{b^2 (1 + a^2)(m^2 - m_,^2)}{m_,^2 (1 + b^2) - m^2 (1 + b^2)}$$

$$= a^2 - \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = C^2,$$

C désignant la tangente de la demi-distance des foyers.

Fig. 11.



Il suit de là que si avec 2C comme arc diamétral on traçait un cercle, les deux points P et P' seraient tels, que la polaire de l'un relative à ce cercle passerait par l'autre, donc les points de rencontre des bissectrices avec l'axe et les deux foyers sont quatre points harmoniques. Ce théorème peut servir à construire une ellipse connaissant le centre, la direction de l'axe et deux tangentes. On peut encore en conclure que si on donne deux tangentes et un foyer, le lieu de l'autre foyer est une circonférence de grand cercle.

Problème. *Trouver le lieu des sommets d'angles droits dont les côtés sont tangents à une ellipse.*

Soient $x'y'$, $x''y''$ les tangentes des coordonnées des points de contact, les deux tangentes en ces points auront pour équations

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2,$$

$$a^2 yy'' + b^2 xx'' = a^2 b^2,$$

on a aussi

$$a^2y_{\prime}^2 + b^2x_{\prime}^2 = a^2b^2,$$
$$a^2y_{\prime\prime}^2 + b^2x_{\prime\prime}^2 = a^2b^2,$$

et pour que les deux tangentes soient rectangulaires, on a la condition connue

$$a''y'y'' + b''x'x'' + a''b'' = 0,$$

il faut éliminer x', x'', y', y'' entre ces quatre équations. L'élimination se fait comme pour l'ellipse plane, et on trouve pour équation du lieu

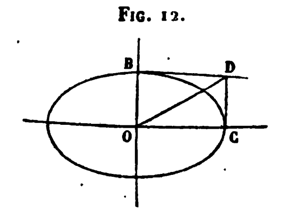
$$(1 - a^2)y^2 + (1 - b^2)x^2 = a^2 + b^2.$$

Premier cas.

$$a^2 < 1, \quad b^2 < 1,$$

on a une ellipse sphérique. Si par les points C et B, som-

Fig. 12.



mets de la courbe donnée, on mène deux tangentes se coupant en D, le cercle concentrique à l'ellipse et passant en D aura pour équation

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

et comme dans la courbe trouvée on a

$$x^2 + y^2 > a^2 + b^2,$$

tous les points de cette courbe sont extérieurs au cercle (OD), par suite ils sont extérieurs à l'ellipse; on pourra

donc par chacun d'eux mener deux tangentes, qui se couperont à angle droit.

Deuxième cas. Si on a

$$a^2 > 1 \quad \text{et} \quad b^2 > 1,$$

l'équation trouvée ne sera satisfaite par aucune valeur réelle de y et de x; en sorte que le problème de mener à l'ellipse deux tangentes rectangulaires sera dans ce cas impossible.

Troisième cas.

$$a^2 > 1, \quad b^2 < 1.$$

L'équation trouvée pourra s'écrire ainsi :

$$(a^2-1)y^2 - (1-b^2)x^2 = -(a^2+b^2),$$

on pourra l'appeler une *hyperbole sphérique,* et tous ses points conviendront encore à la question.

Quatrième cas.

$$a = 1, \quad b < 1.$$

La courbe donnée est une *parabole sphérique,* le lieu trouvé a pour équation

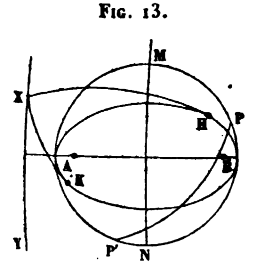
$$x = \pm\sqrt{\frac{1+b^2}{1-b^2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos 2\beta}},$$

2β représentant le petit axe de la courbe donnée; cette équation représente deux circonférences perpendiculaires à l'axe de 90 degrés; il est aisé de reconnaître que ces circonférences sont les deux directrices de la parabole. Ainsi les directrices d'une parabole sphérique ont, comme sur le plan, la propriété de contenir tous les sommets des angles droits circonscrits à la courbe.

Si on construit une courbe dont les points soient les

pôles des tangentes de la courbe donnée, on trouve une

Fig. 13.



ellipse qu'on nomme ellipse *supplémentaire* de la première; elle a avec elle l'axe commun AB; le second axe MN est plus grand que AB. Cela posé, si par un point X de la directrice on mène les tangentes XH, XK, leurs pôles seront deux points P et P_1 de la courbe supplémentaire, l'arc PP′ passera donc par le pôle de la directrice XY qui est le foyer de la parabole donnée, et il sera supplémentaire de l'angle X, c'est-à-dire de 90 degrés. On voit donc que si un ellipse a son petit axe de 90 degrés, tous les arcs de même longueur $\frac{\pi}{2}$, inscrits à la courbe, passeront par un point fixe qui sera le foyer de la parabole supplémentaire. (Borgnet.)

On résout, d'une manière analogue, le problème suivant : Trouver le lieu des intersections des tangentes menées par les extrémités de deux diamètres conjugués. L'équation est la même que sur le plan, savoir :

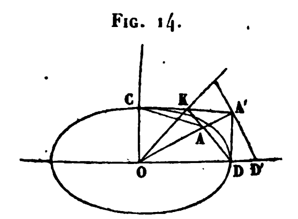
$$\frac{y^2}{(b\sqrt{2})^2}+\frac{x^2}{(a\sqrt{2})^2}=1.$$

Si par le centre O on mène une sécante coupant les deux courbes aux points A′ et A, on aura

$$\text{tang OA}'=\text{tang OA}.\sqrt{2}.$$

De là résulte un moyen simple d'obtenir les axes. Menons

Fig. 14.



aux sommets D et C les tangentes DA', CA'; A' sera un point du lieu; joignons AD, et abaissons OK perpendiculaire sur AD, puis de A' abaissons aussi une perpendiculaire sur OK, cette perpendiculaire viendra couper OD en un point D' qui sera l'extrémité d'un des axes; l'autre sommet C' se trouve de même.

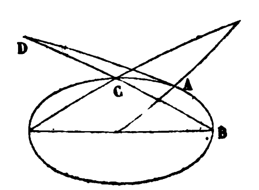
Propriétés des cordes supplémentaires.

Leur définition et la relation entre leurs coefficients angulaires sont comme pour l'ellipse plane. Ainsi en appelant ces coefficients α, α', on aura

$$\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad -\frac{b_{\prime}^2}{a_{\prime}^2},$$

selon que la courbe sera rapportée à ses axes ou à un système de diamètres conjugués. Or on a la même relation entre les coefficients angulaires 6, $6'$ d'une tangente et du

Fig. 15.



rayon mené au point de contact; si donc $\alpha = \beta$, on aura

$$\alpha' = \beta',$$

ce qui démontre que quand une tangente rencontre une corde CB à 90 degrés du centre, la corde supplémentaire de CB rencontre aussi à 90 degrés du centre le rayon mené au point de contact.

Cela donne un moyen facile de mener une tangente par un point donné sur la courbe ou par un point situé à 90 degrés du centre.

Si on appelle γ le coefficient angulaire d'un grand cercle et γ' le coefficient du rayon qui joint son pôle au centre, on a aussi

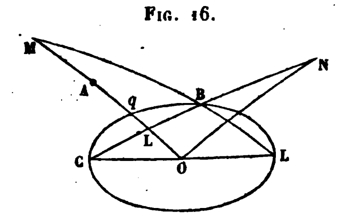
$$\gamma\gamma' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Si donc $\alpha = \gamma$, on aura

$$\alpha' = \gamma',$$

c'est-à-dire que si une corde CB rencontre à 90 degrés du

Fig. 16.



centre un grand cercle, la corde supplémentaire de CB rencontrera aussi à 90 degrés du centre l'arc allant du centre au pôle de ce cercle. Si donc on veut construire la polaire d'un point A, on joindra OA, on prendra sur OA prolongée OM = 90°, on joindra M à l'extrémité L de l'axe ou d'un autre diamètre par un arc coupant l'ellipse en B. On mènera CB corde supplémentaire de BL, on prendra sur CB un point N à 90 degrés du centre, et le point N

sera un point de la polaire de A. Il sera facile d'en trouver un second par la relation connue

$$\tan^2 Oq = \tan OA . \tan OL.$$

On démontrera aussi facilement que si un diamètre et une corde se coupent à 90 degrés du centre, le conjugué et la corde supplémentaire se coupent à la même distance du centre, ce qui servira à construire deux diamètres conjugués dont l'un passe par un point donné.

SUR L'INTERPOLATION (*);

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Professeur au lycée Charlemagne, Docteur ès Sciences mathématiques.

I.

1. Dans l'un de ses intéressants articles sur divers points du Cours de Mathématiques spéciales, M. Gerono a indiqué un moyen de déduire la formule d'interpolation de Newton de celle de Lagrange.

Je me propose de donner de ce même problème une solution assez facile et assez courte pour être introduite dans les Éléments. Toutefois, je ne serais peut-être pas revenu sur cette question, sans une circonstance particulière, qui se présente d'ailleurs assez fréquemment en mathématiques.

Lorsqu'on aborde le problème dont je viens de parler, il suffit d'un coup d'œil pour voir que la formule de Lagrange, dans sa forme habituelle, ne se prête pas aisément à la transformation demandée. Une préparation préalable est nécessaire pour éviter de longs calculs. En cherchant à grouper convenablement les termes, j'ai été

(*) D'après une thèse récemment soutenue dont nous rendrons compte.

conduit à une forme, qui non-seulement fournit une solution presque immédiate du problème proposé, mais qui est en général beaucoup plus commode pour la mise en nombres. Cette forme n'est d'ailleurs nouvelle qu'en apparence; elle ne diffère pas *au fond* d'une formule *énoncée dans des termes différents* par Newton dans un paragraphe des *Principes*, et reproduite par Lacroix dans son *Traité de calcul différentiel et intégral*.

Pour rendre ce travail utile aux lecteurs auxquels ce journal s'adresse, je commencerai par exposer ma solution du problème que j'avais d'abord en vue; je montrerai ensuite l'identité de la nouvelle forme de la formule de Lagrange avec celle qui résulte de la traduction analytique de l'énoncé de Newton.

II.

2. Soit u_x une fonction dont on connaît les $m+1$ valeurs

(1) $$\left\{\begin{array}{l} u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots,\ u_m, \\ \quad\text{pour} \\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m. \end{array}\right.$$

Posons, en général,

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)=\varphi_n(x);$$

et remplaçons, dans la formule de Lagrange,

(A) $$u_x=\sum_{i=0}^{i=m}\frac{\varphi_{m-1}(x)}{\varphi'_m(x_i)}\cdot\frac{x-x_m}{x-x_i}\cdot u_i,$$

la fraction

(2) $$\frac{x-x_m}{x-x_i}$$

par

$$1+\frac{x_i-x_m}{x-x_i}.$$

La fraction (2) se réduisant à l'unité pour $i = m$, nous décomposerons ainsi le second membre en deux sommes partielles, dont la seconde ne s'étendra que de $i = 0$ à $i = m - 1$. Nous aurons, de la sorte,

$$u_x = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\varphi_{m-1}(x)}{\varphi'_m(x_i)} u_i + \sum_{i=0}^{i=m-1} \frac{\varphi_{m-1}(x)}{\left[\frac{\varphi'_m(x_i)}{x_i - x_m}\right]} \cdot \frac{1}{x - x_i} \cdot u_i,$$

ou

$$u_x = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\varphi_m(x)}{x - x_m} \cdot \frac{u_i}{\varphi'_m(x_i)} + \sum_{i=0}^{i=m-1} \frac{\varphi_{m-2}(x)}{\varphi'_{m-1}(x_i)} \cdot \frac{x - x_{m-1}}{x - x_i} \cdot u_i.$$

La seconde partie étant de même forme que le deuxième membre de la formule (A), on peut lui appliquer le même procédé de décomposition ; en opérant de même sur le résultat, et continuant ainsi, on obtient la formule

$$\text{(B)} \qquad u_x = \sum_{n=0}^{n=m} \left[\frac{\varphi_n(x)}{x - x_n} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{u_i}{\varphi'_n(x_i)} \right],$$

que nous avions annoncée et qui se prête mieux aux calculs numériques que la formule (A).

3. Voici maintenant un lemme :

La somme

$$\text{(3)} \qquad \sum_{i=0}^{i=n} \frac{u_i}{\varphi'_n(x_i)}$$

se réduit à

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{h^n} \cdot \frac{\Delta^n u_0}{1 . 2 \ldots n},$$

lorsqu'on prend pour $x_0, x_1, \ldots, x_m$ *les valeurs équidistantes* $x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + mh$.

En effet, l'égalité

$$\varphi'_n(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$$

donne pour ces valeurs de la variable x

$$\varphi'_n(x_i) = (-1)^{n-i} h^n . 1.2\ldots n . \frac{1.2\ldots i}{n(n-1)\ldots(n-i+1)},$$

la somme (3) a donc pour limite l'expression

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{i=}\frac{(-1)^{n-i}[n(n-1)\ldots(n-i+1)]}{1.2\ldots i}u_i,$$

qui n'est autre que (4).

4. Cela posé, la substitution de $x_0 + ih$ à x_i transforme la formule (B) en la suivante :

$$u_x = \sum_{n=0}^{n=m}\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots(x-x_0-\overline{n-1}\,h)}{h^n}\cdot\frac{\Delta^n u_0}{1.2\ldots n},$$

ou

$$\text{(C)}\quad u_x = \sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdots\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right)\frac{\Delta^n u_0}{1.2\ldots n},$$

qui est précisément la formule d'interpolation de Newton, relative au cas où la variable croît par degrés égaux. Le problème proposé est donc résolu.

III.

5. Dans le lemme V du IIIe livre des *Principes*, après avoir énoncé la formule (C), relative au cas où la variable reçoit des valeurs équidistantes, Newton ajoute :

Sunto puncta, A, B, C, D, E, etc.; *ab iisdem ad rectam quamvis positione datam* HN *demitte perpendicula quotcunque* AB, BI, CK, DL, EM.

Si punctorum H, I, K, L, etc..., *inæqualia sunt intervalla* HI, LK, etc..., *collige perpendiculorum* AH, BI, CK, etc., *differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas* b, 2b, 3b, 4b, 5b,..., *secundas per intervalla bina divisas* c, 2c, 3c, 4c,..., *tertias per intervalla terna divisas* d, 2d, 3d,..., *quartas per intervalla quaterna divisas* e, 2e,..., *et sic deinceps; ita ut sit*

$$b = \frac{\text{AH} - \text{BI}}{\text{HI}}, \quad 2b = \frac{\text{BI} - \text{CK}}{\text{IK}}, \quad 3b = \frac{\text{CK} - \text{DL}}{\text{KM}}, \ldots;$$

dein

$$c = \frac{b - 2b}{\text{HK}}, \quad 2c = \frac{2b - 3b}{\text{IL}}, \quad 3c = \frac{3b - 4b}{\text{KM}}, \ldots;$$

postea

$$d = \frac{c - 2c}{\text{HL}}, \quad 2d = \frac{2c - 3c}{\text{IM}}, \ldots.$$

Inventis differentiis, dic AH=a, —HS=p, p *in* —IS=q, q *in* + SK=r, r *in* + SL=s, s *in* + SM=T,...; *pergendo scilicet usque ad perpendiculum ultimum* ME, *et erit ordinatim applicata*

$$(\text{D}) \qquad \text{RS} = a + bq + cq + dr + es + ft \ldots.$$

6. Pour traduire cet énoncé analytiquement de la manière la plus générale, reprenons les deux suites (1). Appelons *rapports du premier ordre* et désignons par R_i les m quantités de la forme

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i};$$

nommons *rapports du second ordre* et représentons généralement par R_i^2 les $m-1$ quantités de la forme

$$\frac{R_{i+1} - R_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

En continuant ainsi, on obtiendra en général $m-n+1$ *rapports de l'ordre* n de la forme

$$R_i^n = \frac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{x_{i+n} - x_i}.$$

Il n'y a qu'un rapport de l'ordre m

$$R_0^m = \frac{R_1^{m-1} - R_0^{m}}{x_m - x_0},$$

et pas de rapport d'ordres supérieurs. On aurait des rapports d'ordre quelconque si les suites (1) étaient illimitées.

Notez d'ailleurs que *lorsque la variable* x *croît par degrés égaux à* h, *depuis* x_0 *jusqu'à* x_0+mh, *on a, en général,*

(5) $$R_i^n = \frac{1}{h^n}\,\frac{\Delta^n u_i}{1.2\ldots n}.$$

Dans ce système de notations, la formule (D) s'écrit

$$u_x = u_0 + (x-x_0)\,R_0 + (x-x_0)(x-x_1)\,R_0^2 + \ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{m-1})\,R_0^m,$$

ou

(E) $$u_x = \sum_{n=0}^{n=m} \frac{\varphi_n(x)}{x-x_n}\,R_0^n.$$

7. Pour montrer l'identité des formules (B) et (E), il suffit de prouver qu'on a généralement

(6) $$R_0^n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{u_i}{\varphi'_n(x_i)}.$$

On arrive sans difficulté en employant le tour de raisonnement de proche en proche. Laissant au lecteur le soin de vérifier l'égalité pour les rapports du premier et

du second ordre, je me bornerai à démontrer que si la loi (6) est vraie pour les rapports du $n^{ième}$ ordre, elle subsiste pour R_0^{n+1}.

Posons, à cet effet,

$$\psi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n+1}),$$

d'où

$$(x - x_{n+1})\,\varphi_n(x) = (x - x_0)\,\psi_n(x) = \varphi_{n+1}(x),$$

et en divisant $x - x_i$, puis faisant $x = x_i$

(7) $$(x_i - x_{n+1})\,\varphi'_n(x_i) = (x_i - x_0)\,\psi'_n(x_i) = \varphi'_{n+1}(x_i).$$

Or on a

$$R_0^n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{u_i}{\varphi'_n(x_i)}, \quad R_1^n = \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{u_i}{\psi'_n(x_i)},$$

$$R_0^{n+1} = \frac{R_1^n - R_0^n}{x_{n+1} - x_0} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{u_i}{x_{n+1} - x_0}\left[\frac{1}{\psi'_n(x_i)} - \frac{1}{\varphi'_n(x_i)}\right]$$
$$+ \frac{1}{x_{n+1} - x_0}\left[\frac{u_{n+1}}{\psi'_n(x_{n+1})} - \frac{u_0}{\varphi'_n(x_0)}\right],$$

ou, eu égard à la relation (7),

$$R_0^{n+1} = \frac{u_0}{\varphi'_{n+1}(x_0)} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{u_i}{\varphi'_{n+1}(x_i)}\left[\frac{x_i - x_0}{x_{n+1} - x_0} - \frac{x_i - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_0}\right]$$
$$+ \frac{u_{n+1}}{\varphi'_{n+1}(x_{n+1})} = \sum_{i=0}^{i=n+1} \frac{u_i}{\varphi'_{n+1}(x_i)},$$

c'est la loi (6) appliquée à R_0^{n+1}.

8. Remarquons, pour finir, que la comparaison des relations (5) et (6) explique clairement pourquoi la somme (3) se réduit à l'expression (4), lorsqu'on fait croître la variable par degrés égaux. Elle fournit même la démonstration la plus logique, sinon la plus courte (n° 3), de ce lemme.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir t. XVII, p. 487);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

CHAPITRE II.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN AVEC UNE SURFACE DU SECOND ORDRE. — POINT INTÉRIEUR.

§ I. — *Intersection d'une droite avec une surface du second ordre.*

28. L'équation de la surface étant toujours

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 \\ &+ 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 \\ &+ 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 \end{aligned}\right\} = 0,$$

je prendrai les équations de la droite sous la forme générale

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0, \\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on pose

$$(3)\quad A_{r,s} = n_r m_s - n_s m_r, \quad \text{d'où} \quad A_{r,s} = -A_{s,r};$$

on déduira des équations (2)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} A_{21}x_1 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = 0; \\ A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant x_1 et x_2 entre les équations (1) et (4)

on obtiendra les $\frac{x_3}{x_4}$ des points d'intersection de la droite avec la surface; on arrive ainsi à l'équation

$$(5) \qquad M_{33}\, x_3^2 + 2 M_{34}\, x_3\, x_4 + M_{44}\, x_4^2 = 0,$$

après avoir posé

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{33} = {} & a_{11}\, A_{23}^2 + a_{22}\, A_{13}^2 + a_{33}\, A_{21}^2 - 2a_{12}\, A_{23}\, A_{13} \\ & - 2a_{13}\, A_{21}\, A_{23} - 2a_{23}\, A_{12}\, A_{13}; \\ M_{44} = {} & a_{11}\, A_{24}^2 + a_{22}\, A_{14}^2 + a_{44}\, A_{21}^2 - 2a_{12}\, A_{24}\, A_{14} \\ & - 2a_{14}\, A_{21}\, A_{24} - 2a_{24}\, A_{12}\, A_{14}; \\ M_{34} = {} & a_{11} A_{23} A_{24} + a_{22} A_{13} A_{14} + A_{34}\, A_{21}^2 - a_{12} A_{23} A_{14} \\ & - a_{12} A_{24} A_{13} - a_{13} A_{21} A_{24} - a_{14} A_{21} A_{23} \\ & - a_{23}\, A_{12}\, A_{14} - a_{24}\, A_{12}\, A_{13}. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on désigne par V le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

où $a_{r,s} = a_{s,r}$, on constate, par un calcul facile, que

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{33} &= + \frac{dV}{da_{44}}; \\ M_{34} &= - \frac{dV}{da_{43}}; \\ M_{44} &= + \frac{dV}{da_{33}}. \end{aligned} \right.$$

Par suite, l'équation de la projection sur le plan $x_3\, x_4$ pourra s'écrire

$$(8) \qquad \frac{dV}{da_{44}}\, x_3^2 - 2\frac{dV}{da_{43}}\, x_3\, x_4 + \frac{dV}{da_{33}}\, x_4^2 = 0.$$

On trouverait, par un calcul semblable, pour les équa-

tions des projections sur les deux autres plans coordonnés

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dV}{da_{44}} x_2^2 - 2\frac{dV}{da_{42}} x_2 x_4 + \frac{dV}{da_{22}} x_4^2 = 0; \\ &\frac{dV}{da_{44}} x_1^2 - 2\frac{dV}{da_{41}} x_1 x_4 + \frac{dV}{da_{11}} x_4^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Avant de discuter ces équations, je signalerai d'abord les relations

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &V\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = \frac{dV}{da_{33}}\frac{dV}{da_{44}} - \left(\frac{dV}{da_{43}}\right)^2; \\ &V\frac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}} = \frac{dV}{da_{22}}\frac{dV}{da_{44}} - \left(\frac{dV}{da_{42}}\right)^2; \\ &V\frac{d^2V}{da_{11}\,da_{44}} = \frac{dV}{da_{11}}\frac{dV}{da_{44}} - \left(\frac{dV}{da_{41}}\right)^2; \end{aligned} \right.$$

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = (n_2 m_1 - n_1 m_2)^2; \\ &\frac{d^2Y}{da_{22}\,da_{44}} = (n_3 m_1 - n_1 m_3)^2; \\ &\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{44}} = (n_3 m_2 - n_2 m_3)^2. \end{aligned} \right.$$

29. Première hypothèse. $\frac{dV}{da_{44}}$ *est différent de zéro.*

La condition de réalité des racines de l'équation (8) est exprimée par l'inégalité

$$\frac{dV}{da_{33}}\frac{dV}{da_{44}} - \left(\frac{dV}{da_{43}}\right)^2 < 0.$$

Si l'on admet que $(n_1 m_2 - n_2 m_1)$ soit différent de zéro, cette inégalité pourra s'écrire

$$(n_1 m_2 - n_2 m_1)^2 V < 0;$$

3.

d'où l'on tirera les conclusions suivantes :

Il n'y a *pas intersection*, si $V > 0$;

Il y a *intersection*, si $V < 0$;

Il y a *tangence*, si $V = 0$;

car il résulte de la dernière hypothèse $V = 0$ que la projection, sur les trois plans coordonnés, des points d'intersection de la droite avec la surface se réduit à un *point unique*.

30. Si l'on avait $(n_1 m_2 - n_2 m_1) = 0$, l'étude de la projection sur le plan des $x_1 x_2$ devrait être abandonnée ; la droite est, en effet, dans un plan parallèle au plan des $x_1 x_2$ (4).

Mais les équations (9) vont permettre de résoudre la question. Les conditions de réalité des racines seront exprimées, pour la première, par

$$(n_1 m_3 - n_3 m_1)^2 V < 0 ;$$

pour la seconde, par

$$(n_2 m_3 - n_3 m_2)^2 V < 0.$$

Or, on ne saurait avoir en même temps $(n_1 m_2 - n_2 m_1) = 0$ et $(n_1 m_3 - n_3 m_1) = 0$; car alors les deux plans représentés par les équations (2) seraient parallèles et ne donneraient plus une droite. On voit encore, dans ce cas, qu'il y aura *non-intersection*, *intersection* ou *tangence*, suivant que V sera *positif*, *négatif* ou *nul*.

31. On pourrait cependant avoir ($m_1 = 0$ et $n_1 = 0$), auquel cas la droite serait parallèle à l'axe des x_1 ; la seconde des équations (9) donnera alors la réponse à la question.

Remarquons d'abord qu'on ne peut pas supposer en

même temps

$$m_2 n_3 - m_3 n_2 = 0\,;$$

car les équations (2) seraient incompatibles. Partant de là on se trouve encore conduit aux conséquences que je viens d'énoncer.

32. Seconde hypothèse. $\frac{dV}{da_{44}}$ *est nul.*

Nous aurons deux cas à examiner.

Premier cas : $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} \gtrless 0$.

La première des relations (10) donne, dans le cas actuel,

$$(12)\qquad V\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = -\left(\frac{dV}{da_{43}}\right)^2,$$

et, comme $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}}$ est différent de zéro, il en résulte que V et $\frac{dV}{da_{43}}$ sont nuls en même temps. Si V est différent de zéro, il sera négatif; et on voit alors qu'il y a intersection, mais l'un des points d'intersection est à l'infini.

Si l'on a $V = 0$, il en résultera $\frac{dV}{da_{43}} = 0$, et réciproquement; les $\frac{x_3}{x_4}$ des points d'intersection sont tous deux infinis, pourvu que $\frac{dV}{da_{33}}$ soit différent de zéro. Les deux dernières équations (10) donnent dans cette hypothèse

$$\frac{dV}{da_{42}} = 0,\quad \frac{dV}{da_{41}} = 0\,;$$

et on voit alors, (8) et (9), que la droite est *tangente à l'infini* ou *asymptotique à la surface.*

Lorsque, V étant nul, on a aussi $\frac{dV}{da_{33}} = 0$, on en con-

clut comme précédemment

$$\frac{dV}{da_{42}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{41}} = 0.$$

Puis, d'après les relations

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} V \frac{d^2V}{da_{22}\,da_{33}} &= \frac{dV}{da_{22}} \frac{dV}{da_{33}} - \left(\frac{dV}{da_{23}}\right)^2, \\ V \frac{d^2V}{da_{11}\,da_{33}} &= \frac{dV}{da_{11}} \frac{dV}{da_{33}} - \left(\frac{dV}{da_{13}}\right)^2, \end{aligned} \right.$$

on conclut encore

$$\frac{dV}{da_{23}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{13}} = 0.$$

Or, le déterminant V fournit les deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} n_1 \frac{dV}{da_{12}} + n_2 \frac{dV}{da_{22}} + n_3 \frac{dV}{da_{32}} + n_4 \frac{dV}{da_{42}} &= 0, \\ m_1 \frac{dV}{da_{12}} + m_2 \frac{dV}{da_{22}} + m_3 \frac{dV}{da_{32}} + m_4 \frac{dV}{da_{42}} &= 0, \end{aligned} \right.$$

qui, en ayant égard aux conséquences déjà établies, donnent

$$\frac{dV}{da_{22}} = 0.$$

On trouverait de la même manière

$$\frac{dV}{da_{11}} = 0.$$

Donc, les trois équations qui déterminent les points d'intersection de la droite se réduisent à des identités, c'est-à-dire que la droite est tout entière située sur la surface. Ainsi :

Lorsque $\frac{dV}{da_{44}} = 0$, et $\frac{d^2 V}{da_{33}\, da_{44}} \gtrless 0$,

Il y a *intersection*, si $V < 0$;

Il y a *tangence à l'infini*, si $V = 0$ et $\frac{dV}{da_{33}} \gtrless 0$;

Il y a *coïncidence*, si $V = 0$ et $\frac{dV}{da_{33}} = 0$.

33. *Deuxième cas.* $\frac{d^2 V}{da_{33}\, da_{44}} = A_{12}^2 = 0$.

I°. Lorsque $\frac{d^2 V}{da_{33}\, da_{44}}$ est nul sans que m_1 et n_1 soient nuls, $\frac{d^2 V}{da_{22}\, da_{44}}$ sera nécessairement différent de zéro; car autrement les équations (2) seraient incompatibles.

Si l'on pose

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} = \lambda,$$

on en déduit

$$(14) \qquad A_{2r} = \lambda A_{1r}.$$

Introduisant dans les équations (6) et (7) l'hypothèse $A_{12} = 0$, ayant égard à la relation (14), et se rappelant que $\frac{dV}{da_{44}}$ est nul, on conclut d'abord

$$(15) \qquad \frac{dV}{da_{43}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{33}} = 0.$$

La droite étant parallèle au plan des $x_1\, x_2$, il faut avoir recours aux projections sur les deux autres plans coordonnés; les équations sont alors

$$(16) \qquad \begin{cases} -2\frac{dV}{da_{42}} x_2 x_4 + \frac{dV}{da_{22}} X_4^2 = 0, \\ -2\frac{dV}{da_{41}} x_1 x_4 + \frac{dV}{da_{11}} X_4^2 = 0. \end{cases}$$

Si V est différent de zéro, il y aura intersection, et V dans ce cas est encore négatif (10). V étant nul, les équations (10) donnent $\frac{dV}{da_{42}} = 0$, $\frac{dV}{da_{41}} = 0$, c'est-à-dire que la droite est tangente à l'infini, si $\frac{dV}{da_{22}}$ est différent de zéro.

Supposons $\frac{dV}{da_{22}} = 0$; le déterminant V fournit les équations

$$\left\{\begin{aligned} n_1\frac{dV}{da_{11}} + n_2\frac{dV}{da_{21}} + n_3\frac{dV}{da_{31}} + n_4\frac{dV}{da_{41}} = 0,\\ n_1\frac{dV}{da_{12}} + n_2\frac{dV}{da_{22}} + n_3\frac{dV}{da_{32}} + n_4\frac{dV}{da_{42}} = 0;\end{aligned}\right.$$

or on a déjà

$$\frac{dV}{da_{41}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{42}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{22}} = 0;$$

on a, en outre, d'après les équations (13) et (15),

$$\frac{dV}{da_{23}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{13}} = 0;$$

donc

$$\frac{dV}{da_{11}} = 0,$$

c'est-à-dire que la droite est tout entière sur la surface. Ainsi

Lorsque $\frac{dV}{da_{44}} = 0$, $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = 0$ et $\frac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}} \gtrless 0$; alors $\frac{dV}{da_{33}} = 0$. Et

Il y a *intersection*, si $V < 0$;

Il y a *tangence*, si $V = 0$ et $\frac{dV}{da_{22}} \gtrless 0$;

Il y a *coïncidence* si $V = 0$ et $\frac{dV}{da_{22}} = 0$.

34. II°. Supposons $(m_1 = 0,\ n_1 = 0)$, alors

$$\frac{d^2 V}{da_{33}\, da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2 V}{da_{22}\, da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2 V}{da_{22}\, da_{33}} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{14} = 0.$$

Introduisons ces hypothèses dans les équations (6), il vient

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{da_{44}} &= a_{11} A_{23}^2; \\ \frac{dV}{da_{33}} &= a_{11} A_{24}^2; \\ -\frac{dV}{da_{43}} &= a_{11} A_{23} A_{24}. \end{aligned} \right.$$

Or $\frac{dV}{da_{44}} = 0$; d'un autre côté, A_{23} ne peut pas être nul; car alors les équations (2) seraient incompatibles; on a donc

$$(18) \quad a_{11} = 0; \quad \text{par suite} \quad \frac{dV}{da_{43}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{33}} = 0.$$

La seconde des équations (10) donne, en outre,

$$\frac{dV}{da_{42}} = 0;$$

et l'on vérifie immédiatement que

$$\frac{dV}{da_{22}} = \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ 0 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux premières équations des projections ne sont

plus aptes à décider la question ; c'est qu'en effet la droite est alors parallèle à l'axe des x_1. Mais il reste la troisième équation

$$-2\frac{dV}{da_{41}}x_1x_4+\frac{dV}{da_{11}}x_4^2=0.$$

La troisième des relations (10)

$$(19)\qquad V(m_2n_3-m_3n_2)^2=-\left(\frac{dV}{da_{41}}\right)^2$$

nous montre que V et $\frac{dV}{da_{41}}$ s'annulent en même temps ; et si V n'est pas nul, il est nécessairement négatif.

Nous serons ainsi conduits aux conséquences suivantes :

Lorsque $\left(\frac{dV}{da_{44}}=0,\ \frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}}=0,\ \frac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}}=0\right)$, alors $\frac{dV}{da_{33}}=0$, $\frac{dV}{da_{22}}=0$; et

Il y a *intersection*, si V est différent de zéro ;

Il y a *tangence*, si $V=0$ et $\frac{dV}{da_{11}}\gtrless 0$;

Il y a *coïncidence*, si $V=0$ et $\frac{dV}{da_{11}}=0$.

35. I°. Si $\frac{dV}{da_{44}}\gtrless 0$,

Résumé.

Il y a *non-intersection*, lorsque $V>0$;
Il y a *intersection*, lorsque $V<0$;
Il y a *tangence*, lorsque $V=0$.

II°. Si $\frac{dV}{da_{44}}=0$,

Il y a *intersection*, lorsque V est différent de zéro.

N. B. Dans ce cas, V est toujours négatif, et l'un des points d'intersection est à l'infini.

Si $V=0$:

Premier cas. $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} \gtrless o,$

Il y a *tangence à l'infini*, lorsque $\frac{dV}{da_{33}} \gtrless o;$

Il y a *coïncidence*, lorsque $\frac{dV}{da_{33}} = o.$

Deuxième cas. $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = o$, et $\frac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}} \gtrless o,$

Il y a *tangence à l'infini*, lorsque $\frac{dV}{da_{22}} \gtrless o;$

Il y a *coïncidence*, lorsque $\frac{dV}{da_{22}} = o.$

N. B. Dans ce cas $\frac{dV}{da_{33}}$ est nécessairement *nul*.

Troisième cas. $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = o$, et $\frac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}} = o,$

Il y a *tangence à l'infini*, lorsque $\frac{dV}{da_{11}} \gtrless o;$

Il y a *coïncidence*, lorsque $\frac{dV}{da_{11}} = o.$

N. B. Dans ce cas $\frac{dV}{da_{33}}$ et $\frac{dV}{da_{22}}$ sont *nuls*.

36. On pourra dire, plus simplement,

Il n'y a *pas intersection*, si $V > o;$
Il y a *intersection*, si $V < o;$
Il y a *tangence*, si $V = o;$

pourvu que, dans le mot *tangence*, on comprenne l'asymptotisme et la coïncidence.

Remarque. Lorsque la droite est tangente, il est facile d'obtenir les coordonnées du point de contact. Si l'on se

reporte, en effet, aux équations (8) et (9), et qu'on y introduise l'hypothèse $V = 0$, on trouve

$$(20)\quad x_1 = \frac{dV}{da_{41}},\quad x_2 = \frac{dV}{da_{42}},\quad x_3 = \frac{dV}{da_{43}},\quad x_4 = \frac{dV}{da_{44}}.$$

On voit que, lorsque $\frac{dV}{da_{44}}$ est nul, le point de contact est à l'infini.

La suite prochainement.

NOTE DE M. LEBESGUE.

Trouver un triangle dont les côtés et la surface forment une équidifférence en nombres rationnels x, x + y, x + 2y, x + 3y.

La question admet-elle des solutions en nombres entiers?

L'équation du problème est

$$x + 3y = \sqrt{\frac{3(x+y)}{2}\frac{(x+3y)}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$= \frac{x+y}{4}\sqrt{3(x+3y)(x-y)},$$

ou bien

$$4 = (x+y)\sqrt{\frac{3(x-y)}{x+3y}}.$$

Posant $y = xz$,

$$4 = x(1+z)\sqrt{\frac{3(1-z)}{1+3z}}.$$

Soit

$$\frac{3(1-z)}{1+3z}=\frac{p^2}{q^2}$$

(p, q étant premiers entre eux), il vient

$$x=\frac{6q}{p}\left(\frac{p^2+q^2}{p^2+3q^2}\right),\quad y=\frac{2q}{p}\left(\frac{3q^2-p^2}{p^2+3q^2}\right).$$

Comme

$$x+y=\frac{4q}{p},\quad x-y=\frac{8pq}{(p^2+3q^2)},$$

on en déduit facilement que la seule solution en nombres entiers est donnée par $p=q=1$, d'où $x=3$, $y=1$.

Cette solution a été donnée t. XVII, p. 395.

QUESTIONS.

(Communiquées par M. Vannson)

---

459. Aux deux extrémités d'une droite AB on élève deux perpendiculaires AC, BD de longueurs données; puis on insère entre AC, BD un certain nombre $p-1$ de moyennes géométriques, et on les dispose entre AC et BD parallèlement à ces deux lignes et à égale distance les unes des autres : en unissant par des droites les extrémités m, m', m'', etc., de ces parallèles, il en résulte un polygone AC $mm'm''$... DB, qui devient (à la limite $p=\infty$) un trapèze curviligne : trouver la surface de ce trapèze.

460. On donne un triangle ABC, et deux points X, Y en ligne droite avec le sommet A; on joint les points X, Y avec un point quelconque O de BC par les droites OX, OY qui coupent AB, AC en des points M, N : démontrer que la droite MN passe par un point fixe quel que soit le point O.

461. Démontrer que la série

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\frac{1}{2.3.4\ldots(n+1)}+\frac{1}{3.4.5\ldots(n+2)}+\ldots$$

est convergente et a pour limite $\frac{1}{(n-1)\,1.2.3\ldots(n-1)}$.

Ce qui donne la formule

$$\frac{1}{A_n^n}+\frac{1}{A_n^{n+1}}+\frac{1}{A_n^{n+2}}+\ldots=\frac{1}{(n-1)\,A_{n-1}^{n-1}},$$

en désignant par A_n^{n+1} le nombre des arrangements de $(n+1)$ lettres n à n.

PROPRIÉTÉS FOCALES DES SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE D'APRÈS M. HELLERMANN (*)

(voir t. XVII, p. 242);

PAR M. DEWULF.

Je conserve la notation de M. Hellermann.

Par tout point d'un ellipsoïde passent deux lignes de courbure et deux plans osculateurs à ces lignes. Les deux lignes de courbure sont déterminées par les deux hyperboloïdes homofocaux à l'ellipsoïde qui passent par le point considéré, et les plans osculateurs aux lignes de courbure sont les plans tangents aux hyperboloïdes.

Soient donc

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'ellipsoïde donné, $(x_1\ y_1\ z_1)$ un point M de cette surface.

(*) Ces admirables propriétés appartiennent à M. Valson, professeur de Faculté à Grenoble; il les a énoncées et démontrées dans une thèse remarquable soutenue à Paris en 1855; nous y reviendrons.

En remplaçant dans l'équation (1) a^2, b^2, c^2 par a^2-u^2, b^2-u^2, c^2-u^2, u ayant la valeur de l'une des deux racines de l'équation

$$(2)\qquad \frac{x_1^2}{a^2-u^2}+\frac{y_1^2}{b^2-u^2}+\frac{z_1^2}{c^2-u^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2},$$

nous aurons les équations des deux hyperboloïdes homofocaux qui passent par le point M. Désignons ces deux racines par u_0^2 et u_1^2.

Dans les équations des plans tangents à ces deux hyperboloïdes au point M, faisons $y=0$ et $z=0$, et désignons les distances OP et OQ par α et β; nous aurons

$$\alpha=\frac{a^2-u_0^2}{x_1},\quad \beta=\frac{a^2-u_1^2}{x_1},$$

d'où

$$(3)\qquad \alpha.\beta=\frac{a^4-a^2(u_0^2+u_1^2)+u_0^2u_1^2}{x_1^2}.$$

Développons en simplifiant l'équation (2)

$$u^4-(a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2)u^2+\left(\begin{array}{l}a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\\ -(b^2+c^2)x^2\\ -(a^2+c^2)y^2\\ -(a^2+b^2)z^2\end{array}\right)=0.$$

Tirant de là $u_0^2+u_1^2$ et $u_0^2u_1^2$ et substituant dans l'équation (3), il vient, après simplification,

$$\alpha\beta=\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2}.$$

Désignons par α_1 et β_1, α_2 et β_2 les longueurs qui correspondent à α et β sur les axes des y et des z, nous trouverons, par de simples changements de lettres,

$$\alpha_1\beta_1=-\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{b^2},$$

et

$$\alpha_2\beta_2 = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{c^2}.$$

Le produit $\alpha\beta$ est indépendant de xyz; donc les points P et Q marquent sur l'axe a des divisions en involution dont O est le point central. Les points doubles de ces deux séries sont réels et sont situés de part et d'autre du centre à la distance $\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}{a}$. On sait que ces points doubles divisent harmoniquement les segments déterminés par deux points correspondants.

α_1, β_1 étant négatif, les points doubles sont imaginaires sur l'axe moyen b; ils sont réels sur le petit axe c.

Si par les points F et F′ et par l'intersection de deux plans osculateurs on mène deux plans, les angles qu'ils forment entre eux sont partagés en parties égales par les plans osculateurs.

Cela résulte de la théorie des faisceaux en involution. Dans un faisceau de plans en involution, il n'existe que deux plans correspondants rectangulaires, et ces plans sont les plans bissecteurs des angles des plans doubles.

Les normales à la surface menées par les ombilics coupent évidemment le grand axe aux points F et F′.

Les coordonnées des ombilics sont

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

et le rayon des sphères focales est

$$R = \frac{bc}{a}.$$

THÉORÈMES DU CASIER ET DU TREILLIS.

Théorème. Soient A_1, A_2, A_3 trois groupes de plans formés chacun de n plans; leurs intersections donnent lieu à des *cases* ayant n^3 sommets par lesquels passent une infinité de surfaces d'ordre n; chacune jouit de cette propriété. Désignant par p_1, p_2, p_3 les produits respectifs des n distances d'un point de la surface aux plans A_1, A_2, A_3; on a la relation linéaire

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0;$$

les λ sont des constantes.

Démonstration. La même que pour le théorème (t. XVII, p. 441), qu'on peut nommer théorème du *treillis*, dénomination que M. Poncelet m'a indiquée.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 33);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

§ II. — *Conditions pour qu'un point soit intérieur à une surface du second ordre.*

37. Je dirai qu'un point est *intérieur à une surface du second ordre* lorsque de ce point on ne peut mener aucune tangente à la surface (*).

(*) Ainsi dans l'hyperboloïde à une nappe, il n'existe pas de points intérieurs. TM.

Soient $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ les coordonnées d'un point fixe, et

$$(1) \qquad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0 \end{cases}$$

les équations d'une droite quelconque; on exprimera que cette droite passe par le point donné, en écrivant les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 + m_4 \alpha_4 = 0, \\ n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + n_3 \alpha_3 + n_4 \alpha'_4 = 0. \end{cases}$$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que si une droite était tangente, le déterminant V est nul, et réciproquement (n° 35).

Nous exprimerons donc que le point $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ est *intérieur*, en écrivant les conditions pour qu'il n'y ait aucune valeur des m_i, n_i qui puisse annuler le déterminant

$$(3) \qquad V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{13} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

où

$$a_{r,s} = a_{s,r},$$

et en ayant égard toutefois aux relations (2).

Désignons par φ le premier membre de l'équation de la surface, par X_1, X_2, X_3, X_4 ses demi-dérivées par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, x_4; puis, par φ_0, A_1, A_2, A_3, A_4 ces mêmes expressions dans lesquelles on aura remplacé x_1, x_2, x_3, x_4 respectivement par α_1, α_2, α_3, α_4;

on aura les identités

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
A_1 &= a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4\\
&= a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3 + a_{41}\alpha_4;\\
A_2 &= a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4\\
&= a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3 + a_{42}\alpha_4;\\
A_3 &= a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4\\
&= a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + a_{43}\alpha_4;\\
A_4 &= a_{41}\alpha_2 + a_{42}\alpha_2 + a_{43}\alpha_3 + a_{44}\alpha_4\\
&= a_{14}\alpha_1 + a_{24}\alpha_2 + a_{34}\alpha_3 + a_{44}\alpha_4;\\
\varphi_0 &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4.
\end{aligned}\right.$$

38. Maintenant multiplions la quatrième ligne du déterminant V par α_4, et ajoutons-y les trois premières multipliées respectivement par α_1, α_2, α_3, il viendra, en ayant égard aux relations (2) et (4),

$$(5)\qquad \alpha_4 V = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3\\
A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0\\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0\\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

Puis multiplions la quatrième colonne de ce dernier déterminant par α_4 et ajoutons-y les trois premières respectivement multipliées par α_1, α_2, α_3, on obtiendra définitivement

$$(6)\qquad \alpha_4^2 V = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_1 & m_1 & n_1\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & A_2 & m_2 & n_2\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & A_3 & m_3 & n_3\\
A_1 & A_2 & A_3 & \varphi_0 & 0 & 0\\
m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0\\
n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

En développant le second membre de l'identité (6), après avoir posé

$$(7)\qquad \begin{cases} y_1 = n_2 m_3 - n_3 m_2, \\ y_2 = n_3 m_1 - n_1 m_3, \\ y_3 = n_1 m_2 - n_2 m_1, \end{cases}$$

$$(8)\qquad R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & A_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 & \varphi_0 \end{vmatrix}$$

on trouvera

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha_4^2 V = \dfrac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} y_1^2 + \dfrac{d^2 R}{da_{33}\, da_{11}} y_2^2 + \dfrac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} y_3^2 \\ \quad - 2 \dfrac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}} y_2 y_3 - 2 \dfrac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} y_1 y_3 \\ \quad - 2 \dfrac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}} y_1 y_2. \end{cases}$$

On voit, d'après les équations (7), que si l'on peut déterminer pour y_1, y_2, y_3 des valeurs qui ne soient pas nulles toutes trois et qui annulent le second membre de l'équation (9), il en résultera toujours pour les m_i, n_i une infinité de valeurs qui rendront la droite (1) tangente à la surface.

39. Avant de discuter l'équation (9), je vais indiquer plusieurs relations d'identité, dont la vérification est facile, et qui peuvent s'obtenir immédiatement en appliquant aux dérivées partielles du déterminant R la formule générale déjà citée

$$(10)\qquad P \frac{d^2 P}{da_{rs}\, da_{r_1 s_1}} = \frac{dP}{da_{rs}} \frac{dP}{da_{r_1 s_1}} - \frac{dP}{da_{rs_1}} \frac{dP}{da_{r_1 s}},$$

et en ayant égard à l'identité

$$\frac{d^2 P}{da_{rs}\, da_{r_1 s_1}} = - \frac{d^2 P}{da_{rs_1}\, da_{r_1 s}} \tag{11}$$

(Brioschi, *Théorie des Déterminants*, p. 10).

Ces relations sont les suivantes :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} &= \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{11}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{22}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}\right)^2, \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} &= \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{11}} \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}}\right)^2, \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} &= \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}}\right)^2; \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{23}} &= \frac{d^2 R}{da_{23}\, da_{11}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{22}} + \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}, \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{13}} &= \frac{d^2 R}{da_{13}\, da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{11}} + \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}, \\
\varphi_0 \frac{dR}{da_{12}} &= \frac{d^2 R}{da_{12}\, da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{11}} + \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}}.
\end{aligned}\right.$$

Première hypothèse. $\dfrac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}}$ *est différent de zéro.*

40. L'équation (9) pourra s'écrire de la manière suivante, en formant le carré par rapport à la variable y_1,

$$\begin{aligned}
\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 &+ \left[\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{11}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}\right)^2\right] y_2^2 \\
&+ \left[\frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{22}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{22}} - \left(\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}}\right)^2\right] y_3^2 \\
&- 2\left[\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{23}} + \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}}\right] y_2 y_3,
\end{aligned}$$

où

$$Y_1 = \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} y_1 - \frac{d^2 R}{da_{33}\, da_{12}} y_2 - \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{13}} y_3;$$

et si l'on a égard aux relations (12), elle prendra la forme définitive

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} \\ &= Y_1^2 + \varphi_0 \left(\frac{dR}{da_{33}} y_2^2 - 2\frac{dR}{da_{23}} y_2 y_3 + \frac{dR}{da_{22}} y_3^2\right). \end{aligned}\right.$$

Nous distinguerons alors plusieurs cas.

41. Premier cas. $\frac{dR}{da_{33}}$ *est différent de zéro.*

Il viendra, en formant le carré par rapport à y_2,

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} Y_2 + \varphi_0 \frac{\frac{dR}{da_{22}} \frac{dR}{da_{33}} - \left(\frac{dR}{da_{23}}\right)^2}{\frac{dR}{da_{33}}} y_3^2,$$

après avoir posé

$$\frac{dR}{da_{33}} Y_2 = \frac{dR}{da_{33}} y_2 - \frac{dR}{da_{23}} y_3.$$

Enfin, si l'on a égard à l'identité

$$(14)\qquad R \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = \frac{dR}{da_{22}} \frac{dR}{da_{33}} - \left(\frac{dR}{da_{23}}\right)^2,$$

l'équation précédente s'écrira

$$(15)\quad \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} Y_2^2 + \varphi_0 \frac{R \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}}}{\frac{dR}{da_{33}}} y_3^2.$$

Or, pour que le second membre de cette équation ne puisse pas s'annuler, il faut et il suffit que tous les termes soient positifs, puisque le premier est essentiellement positif. En effet, il ne pourrait alors devenir nul

que pour $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, ce qu'on ne saurait admettre, car, dans ce cas, les équations (1) et (2) seraient incompatibles; et l'on sait qu'il passe toujours une droite par un point donné.

Donc, pour que le point soit intérieur lorsque

$$\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} \gtrless 0 \quad \text{et} \quad \frac{dR}{da_{33}} \gtrless 0,$$

il faut et il suffit qu'on ait :

1°. $$\varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} > 0;$$

2°. $$R \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} > 0.$$

42. Second cas. $\dfrac{dR}{da_{33}}$ *est nul.*

L'équation (13) donne alors

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \left(\frac{dR}{da_{22}} y_3^2 - 2 \frac{dR}{da_{23}} y_2 y_3 \right);$$

ou, en ordonnant par rapport à y_3,

$$(16)\quad \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} Y_2^2 - \varphi_0 \frac{\left(\dfrac{dR}{da_{23}}\right)^2}{\dfrac{dR}{da_{22}}} y_2^2.$$

Ici

$$\frac{dR}{da_{22}} Y_2 = \frac{dR}{da_{22}} y_3 - \frac{dR}{da_{23}} y_2.$$

On voit que le second membre de l'équation (16) contiendra toujours un terme négatif, tant que $\dfrac{dR}{da_{23}}$ ne sera pas nul, et, par suite, il sera toujours possible de l'annuler.

Soit

$$\frac{dR}{da_{23}} = 0;$$

la relation (14) nous montre que R et $\frac{dR}{da_{23}}$ sont nuls en même temps, puisqu'on a supposé $\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}}$ différent de zéro. L'équation (16) se réduit alors à

$$(17) \qquad \alpha_4^2 V \frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} Y_2^2.$$

Le point sera intérieur si, $\frac{dR}{da_{22}}$ n'étant pas nul, le produit $\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}}$ est positif; si $\frac{dR}{da_{22}}$ était nul, on pourrait évidemment annuler le second membre de l'équation (17).

Donc, pour que le point soit intérieur lorsque

$$\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}} \gtrless 0$$

et

$$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

il faut et il suffit qu'on ait:

1°. $$R = 0,$$

2°. $$\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} > 0.$$

SECONDE HYPOTHÈSE. *$\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}}$ est nul et $\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{33}}$ est différent de zéro.*

43. L'équation (9) donne, en formant le carré par

rapport à y_2,

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2R}{da_{11}\,da_{33}} = Y_1^2$$

$$-\left(\frac{d^2R}{da_{33}\,da_{12}}\right)^2 y_1^2 + \left[\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{33}}\,\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{22}} - \left(\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{23}}\right)^2\right] y_3^2$$

$$-2\left[\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{33}}\,\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{13}} + \frac{d^2R}{da_{33}\,da_{12}}\,\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{13}}\right] y_1 y_3$$

où

$$(18)\qquad Y_1 = \frac{d^2R}{da_{11}\,da_{33}}\,y_2 - \frac{d^2R}{da_{33}\,da_{12}}\,y_1 - \frac{d^2R}{da_{11}\,da_{23}}\,y_3;$$

et, en ayant égard aux relations (12),

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_4^2 V \dfrac{d^2R}{da_{11}\,da_{33}} \\ = Y_1^2 + \varphi_0\left(\dfrac{dR}{da_{33}}\,y_1^2 - 2\,\dfrac{dR}{da_{13}}\,y_1 y_3 + \dfrac{dR}{da_{11}}\,y_3^2\right). \end{array}\right.$$

Or, de la première des identités (12), il résulte que $\varphi_0 \frac{dR}{da_{33}}$ est négatif; par conséquent, le second membre de l'équation (18) renfermera toujours un carré précédé du signe moins; et, par suite, ce second membre pourra toujours s'annuler tant que $\frac{dR}{da_{33}}$ ne sera pas nul.

Soit donc

$$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

d'où il suit (n° 12)

$$\frac{d^2R}{da_{33}\,da_{12}} = 0,$$

et réciproquement; l'équation (18) devient

$$\alpha_4^2 V \frac{d^2R}{da_{11}\,da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0\left(\frac{dR}{da_{11}}\,y_3^2 - 2\,\frac{dR}{da_{13}}\,y_1 y_3\right)$$

ou bien encore

$$(19)\quad a_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} = V_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} Y_2^2 - \varphi_0 \frac{\left(\frac{dR}{da_{13}}\right)^2}{\frac{dR}{da_{11}}} y_1^2.$$

On voit que le second membre de cette dernière équation contiendra toujours un terme négatif tant que $\frac{dR}{da_{13}}$ ne sera pas nul, et dès lors on pourra l'annuler.

Soit

$$\frac{dR}{da_{13}} = 0;$$

cette hypothèse jointe à

$$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

et introduite dans la formule

$$(20)\qquad R \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} = \frac{dR}{da_{11}} \frac{dR}{da_{33}} - \left(\frac{dR}{da_{13}}\right)^2,$$

donne

$$(21)\qquad R = 0;$$

et l'équation (19) se réduit à

$$(22)\qquad \alpha_4^2 V \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} = Y_1^2 + \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} Y_2^2.$$

Le point sera intérieur si, $\frac{dR}{da_{11}}$ n'étant pas nul, le produit $\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}}$ est positif; si $\frac{dR}{da_{11}}$ était nul, on pourrait évidemment annuler le second membre de l'équation (22). Donc, pour que le point soit intérieur lorsque

$$\frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 R}{da_{11}\, da_{33}} \gtrless 0,$$

il faut et il suffit que :

1°. $$\frac{dR}{da_{33}} = 0,$$

2°. $$R = 0,$$

3°. $$\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} = 0.$$

TROISIÈME HYPOTHÈSE.

$\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{33}} = 0$, $\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{33}} = 0$, $\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{22}}$ *différent de zéro.*

43. L'équation (9) donne, en ordonnant par rapport à y_3,

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} & \alpha_4^2 V \frac{d^2R}{da_{11}\,da_{22}} \\ & = Y_1^2 - \left(\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{13}}\right)^2 y_1^2 - \left(\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{23}}\right)^2 y_2^2 \\ & - 2y_1 y_2 \left[\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{22}}\,\frac{d^2R}{da_{33}\,da_{12}} + \frac{d^2R}{da_{22}\,da_{13}}\,\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{23}}\right]; \end{aligned} \right.$$

après avoir posé

$$Y_1 = \frac{d^2R}{da_{11}\,da_{22}} y_3 - \frac{d^2R}{da_{22}\,da_{13}} y_1 - \frac{d^2R}{da_{11}\,da_{23}} y_2.$$

Or les relations (12) conduisent à

$$\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} = -\left(\frac{d^2R}{da_{22}\,da_{13}}\right)^2,$$

$$\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} = -\left(\frac{d^2R}{da_{11}\,da_{23}}\right)^2;$$

ce qui montre que $\varphi_0 \frac{dR}{da_{22}}$ et $\varphi_0 \frac{dR}{da_{11}}$ sont négatifs.

On voit, d'un autre côté, qu'il sera toujours possible d'annuler le second membre de l'équation (23).

Ainsi, dans cette dernière hypothèse, le point ne saurait être intérieur.

Résumé.

44. Si $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$, sont les coordonnées d'un point, et si les quantités A_1, A_2, A_3, A_4, φ_0 et R sont définies par les équations (4) et (8),

Pour que *ce point soit intérieur,* il faut et il suffit que :

I°. Si $\frac{dR}{da_{33}} \gtrless 0$, on ait (en même temps)

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_0 \frac{dR}{da_{33}} > 0, \\ R \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} > 0. \end{array}\right.$$

II°. Si $\frac{dR}{da_{33}} = 0$, il faut qu'on ait

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{d'abord} & R = 0, \\ \text{puis} & \left\{\begin{array}{l} \varphi_0 \frac{dR}{da_{22}} > 0, \quad \text{si} \quad \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} \gtrless 0, \\ \text{ou} \\ \varphi_0 \frac{dR}{da_{11}} > 0, \quad \text{si} \quad \frac{d^2 R}{da_{22}\, da_{33}} = 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Lorsque φ_0 est nul, le point est *sur la surface;* dans toutes les autres circonstances, le point sera *extérieur*.

La suite prochainement.

THÉORÈMES DIVERS
ET PROBLÈMES SUR LES COURBES PLANES

(voir t. XVII, p. 443);

PAR M. J. STEINER.

---

13. THÉORÈME X. p *est un point dans le plan d'un triangle* ABC. *On peut circonscrire au triangle une conique* P^2, *et y inscrire une conique* P_1^2, *qui aient chacune pour centre le point* p. *Les deux coniques sont toujours de même* espèce, *deux ellipses*, *deux hyperboles ou deux paraboles. Si dans les deux coniques les produits des axes sont égaux*, *le lieu du point* p *est formé de deux courbes du troisième ordre*, *savoir :*

1°. P^3 : les trois asymptotes passent par le centre de gravité du triangle ABC et sont des tangentes d'*inflexion*, et parallèles aux côtés du triangle. Les trois branches hyperboliques de la courbe P^3 sont dans les espaces extérieurs au triangle et touchent ses côtés au milieu; P^3 est le lieu des centres des hyperboles.

2°. P_1^3 : cette courbe est formée de deux parties; l'une fermée, *ovale*, et l'autre consiste en trois branches hyperboliques; l'ovale est dans l'intérieur du triangle et touche ses côtés au milieu, et à chaque point de cet ovale correspondent des hyperboles; les trois branches infinies ont pour asymptotes les côtés du triangle circonscrit au triangle ABC, parallèlement à ses côtés, et sont situées dans les angles de ce triangle; chaque point de ces branches correspond à des ellipses; l'ovale est dans l'intérieur de l'ellipse, qui touche aussi les trois côtés des triangles aux milieux A', B', C'.

Les trois segments de l'ovale, au-dessus des cordes A' B', B' C', C' A', sont *équivalents*, de même que les segments de l'ellipse.

14. Problèmes. *Quelle est l'aire de l'ovale?*

15. *Quel est le lieu du point* p, *lorsque les deux coniques doivent être semblables? Le lieu est-il formé d'une ligne du quatrième ordre et de quatre droites?*

16. Théorème. XI. *Soient un triangle* ABC *avec une conique* P^2 *circonscrite et une conique inscrite* P_1^2, *et ayant même centre* p, *il y aura une infinité d'autres triangles inscrits et circonscrits simultanément* (Poncelet); *soit* $A_1 B_1 C_1$ *un* quelconque *de ces triangles*, m *le centre d'un cercle circonscrit à ce triangle et* r *le rayon; α, β, γ les perpendiculaires abaissées du centre commun* p *aux trois côtés du triangle* $A_1 B_1 C_1$; a, b *les demi-axes de* P^2, *et* a', b' *les demi-axes de* P_1^2, *on a la relation*

$$2 r \alpha\beta\gamma = ab\, a'\, b'.$$

A', B', C' étant les milieux des côtés. Soient α', β', γ' les distances de p aux côtés du triangle A' B' C', on a la relation

$$4 r \alpha' \beta' \gamma' = a'^2 b'^2.$$

17. Si

$$a = b = r,$$

alors

$$2 \alpha\beta\gamma = a_1 b_1 (a_1 \pm b_1);$$

de là ce théorème :

Théorème XII. *Si du centre* p *d'une ellipse on décrit un cercle d'un rayon égal à la somme ou à la différence des deux demi-axes, on peut inscrire une infinité de triangles dans le cercle et circonscrits à l'ellipse.*

Observation. Steiner considère ensuite le cas où le cercle est inscrit et l'ellipse circonscrite.

18. Théorème XIII. *Le lieu des centres des coniques semblables circonscrites à un triangle donné est une ligne du quatrième degré ayant les milieux des côtés pour points* doubles; *l'enveloppe de ces coniques est encore une courbe du quatrième degré ayant les sommets du triangle pour* points doubles *et n'a que quatre tangentes doubles.*

Il n'y a pas deux coniques *homothètes.*

Quel est le lieu des foyers? Quelle est l'enveloppe des axes des coniques?

19. Théoreme XIV. *Les lieux des centres des coniques semblables inscrites à un triangle est une ligne du quatrième ordre; si les coniques sont des ellipses, la courbe lieu des centres est formée de quatre branches ovales. Si les coniques sont des paraboles, la courbe se réduit à quatre droites dont l'une est située à l'infini, et les trois droites passent par les milieux des côtés du triangle donné.*

Quelle est l'enveloppe de ces courbes? le lieu des foyers? l'enveloppe des axes?

En général, on peut inscrire dans un triangle quatre coniques semblables à une conique donnée et homothètes avec cette conique; ainsi toutes les coniques inscrites peuvent se partager en groupes chacun de quatre coniques homothètes. Si ce sont des ellipses, alors les quatre centres dans un groupe sont les sommets d'un quadrilatère complet dont les trois couples de côtés opposés passent par les sommets du triangle.

Le produit des demi-axes de ces quatre ellipses est le même pour tous les groupes et égal à la quatrième puissance de l'aire du triangle donné.

Ces quatre ellipses touchent chaque côté en quatre points a', b', c', d', dont deux b', c' sont entre A et B; a de l'autre côté de A et d' de l'autre côté de B; et l'on a

$$Aa' = Bd', \quad Ad' = Ba', \quad Ab' = Bc', \quad Ac' = Bb'.$$

Désignant ces quatre distances par a_0, b_0, c_0, d_0, et les distances des quatre centres au côté AB par e_1, e_2, e_3, e_4, on a

$$a_0 b_0 c_0 d_0 e_1 e_2 e_3 e_4 = \Delta^4,$$

Δ est l'aire du triangle.

Si l'on circonscrit au triangle quatre ellipses ayant respectivement même centre que les quatre ellipses homothètes inscrites, le produit des demi-axes des quatre ellipses circonscrites divisé par le produit des demi-axes des ellipses inscrites donne un quotient constant.

Mêmes propositions pour l'hyperbole.

RECTIFICATION

Dans la rédaction de la solution géométrique de la question 296

(voir t. XVII, p. 402);

Par M. DE JONQUIÈRES.

Ligne 8 *en remontant*, *il faut lire :*

Les quatre premiers sont les points P et les quatre autres sont les points P′ qui répondent à l'énoncé général du problème, lequel semble ainsi admettre quatre solutions.

Mais les quatre points d'intersection, etc. (*Il faut intercaler ici tout le dernier paragraphe de l'article*, *page* 403, *depuis la ligne* 7 *jusqu'à la ligne* 22, *et ter-*

miner par le paragraphe qui commence au bas de la page 402 par ces mots : Quant à la construction des points p, q, etc.)

SOLUTION DES QUESTIONS 455 ET 456

(voir t. XVII, p. 434);

PAR MM. CHARLES DOLLÉ, DE COMPIÈGNE,
S. CUENOD, DE LAUSANNE, ET ASTIER, DE LYON.

Question 456.

Dans un plan donné par ses deux traces, mener une droite telle, que ses deux projections ne forment qu'une seule et même droite (solution graphique).

La droite demandée est évidemment l'intersection d'un plan perpendiculaire aux deux plans de projection avec le plan donné.

Soient PQ et QR les traces du plan donné; menant un plan pqr perpendiculaire aux deux plans de projection, l'intersection de ces deux plans est la droite demandée. Les projections de cette intersection se confondent avec les traces du plan pqr; en rabattant ce plan sur le plan vertical, la droite demandée se rabat en A'.

Note. La solution de la question 455 étant *intuitive*, nous ne l'insérons pas.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 458

(voir tome XVII, page 463);

Par M. DE MONTEBELLO,
Élève de mathématiques spéciales à l'institution des Carmes
(classe de M. Gerono).

La limite de

$$(1) \qquad \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

est l 2 pour $n=\infty$. (Catalan.)

Je pose

$$n=2^m,$$

m pouvant être quelconque, mais 2^m restant toujours entier. Je cherche d'abord la limite de l'expression (1) quand m devient infini en restant entier.

Posons

$$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^{m+1}-1}+\frac{1}{2^{m+1}},$$

$$B=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2^{m+1}-1}-\frac{1}{2^{m+1}},$$

on aura

$$A-B=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^m},$$

donc

$$B=A-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m}\right),$$

$$B=\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\ldots+\frac{1}{2^{m+1}-1}+\frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

Ceci est vrai quelque grand que soit m, et à la limite, B devient l 2 ; on aura donc

$$l2 = \lim \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} \right),$$

n étant toujours une puissance entière de 2.

Maintenant je vais prouver que la limite est la même lorsque m devient infini en passant par des valeurs quelconques, mais 2^m ou n restant toujours entier.

Remarquons d'abord que lorsque n augmente, l'expression (1) augmente. Remplaçons, en effet, n par $n+1$, cette expression devient

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2};$$

l'accroissement qu'elle subit

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

est positif, car il est plus grand que

$$\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

qui est zéro.

Cela posé, supposons m compris entre deux nombres entiers p et $p+1$.

$$\frac{1}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+2} + \ldots + \frac{1}{2^{m+1}}$$

sera compris entre

$$\frac{1}{2^p+1} + \frac{1}{2^p+2} + \ldots + \frac{1}{2^{p+1}}$$

et

$$\frac{1}{2^{p+1}+1} + \frac{1}{2^{p+1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{p+2}}.$$

Les deux dernières expressions ont pour limite l2; donc la précédente expression, qui est constamment comprise entre les deux autres, a la même limite. Donc enfin on a

$$\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=l2.$$

Note. MM. Siebel, de Lausanne, Hatterer, maître répétiteur à Clermont, Astier, de Lyon, Martelli, de Milan, ont adressé des solutions à peu près semblables à la précédente; celle de M. Siebel est en allemand.

SOLUTION DE LA QUESTION 453

(voir t. XVII, p. 434);

PAR M. MICHAUX,
Élève du lycée Charlemagne.

$$L(n+1)<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<1+L(n+1),$$

$$L = \text{log népérien.}$$

(SCHLOMILCH.)

En désignant par x une quantité positive comprise entre 0 et 1, on a la série convergente à termes alternativement positifs et négatifs

$$L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots,$$

d'où l'on déduit pour x les deux limites

$$x>L(1+x),\quad x<L(1+x)+\frac{x^2}{2}.$$

On aura donc généralement, si p est positif et supérieur à 1,

$$(1)\qquad L\left(1+\frac{1}{p}\right)<\frac{1}{p}<L\left(1+\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}.$$

Remplaçant p successivement par 1, 2, 3,..., n dans ces inégalités (1), ajoutant membre à membre les nouvelles inégalités obtenues, et posant, pour abréger,

$$L\left(1+\frac{1}{1}\right)+L\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+L\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
$$=\Sigma.L\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

on voit que

$$\Sigma.L\left(1+\frac{1}{p}\right)<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<\Sigma.L\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right\}.$$

Or

$$L\left(1+\frac{1}{p}\right)=L\frac{p+1}{p},$$

et la somme des logarithmes de plusieurs quantités est égale aux logarithmes du produit de ces mêmes quantités, on aura donc

$$\Sigma.L\left(1+\frac{1}{p}\right)$$
$$=L\left(1+\frac{1}{1}\right)+L\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+L\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=L\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n}{n-1}\,\frac{n+1}{n}=L\,(n+1).$$

Ainsi

$$L(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < L(n+1) + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right\}.$$

Cela posé, les termes de la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2},$$

prolongée indéfiniment, peuvent être groupés ainsi

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{1}{1^2} + \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right] + \left[\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right] + \ldots \\ + \left[\frac{1}{(2^k)^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2}\right], \end{cases}$$

et comme l'on a généralement

$$\frac{1}{(2^k)^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2} < 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^2} = \frac{1}{2^k},$$

on voit que la somme des termes de la série (2) prolongée indéfiniment est plus petite que la somme des termes de la progression géométrique décroissante indéfinie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

et comme cette dernière série a pour somme 2, nous avons enfin

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right\} < 1.$$

Donc on peut écrire

$$L(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + L(n+1).$$

C. Q. F. D.

Remarque. On voit que la série

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots,$$

prolongée indéfiniment a pour somme $\frac{\pi^2}{6}$. Donc on pourrait remplacer la limite supérieure $1+L(n+1)$ par la limite plus faible $L(n+1)+\frac{\pi^2}{6}$ (*).

Note. MM. Cornet, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot), et Gérard, élève de l'institution des Carmes (classe de M. Gerono) ont résolu à peu près la question de la même manière.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 453;

PAR M. ASTIER, DE LYON.

Dans la formule connue

$$\log p = \lim\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{pn}\right)$$

considérons la suite

$$S_k=\frac{1}{kn}+\frac{1}{kn+1}+\ldots+\frac{1}{(k+n)n}.$$

On a évidemment à la limite

$$\log p = S_1+\ldots+S_k+\ldots+S_p.$$

Si l'on fait la somme deux à deux des termes équidistants

(*) Cette remarque appartient à M. Michaux.

des extrêmes, le numérateur sera constant et égal à

$$kn + (k+1)n,$$

le dénominateur sera toujours plus grand que

$$kn \times (k+1)n$$

et plus petit que

$$\left[\frac{k+n+1)n}{2}\right]^2.$$

Donc

$$\frac{(2k+1)n}{\frac{(2k+1)^2 n^2}{4}}(n+1) < 2S_k < \frac{(2k+1)n}{k(k+1)n^2}(n+1),$$

et, en remplaçant $n+1$ par n, ce qui est permis, à la limite

$$\frac{2}{2k+1} < S_k < \frac{2k+1}{k(k+1)},$$

ou, à fortiori,

$$\frac{1}{k+1} < S_k < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right).$$

Donc

$$\log p > \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}$$

et

$$\log p < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2p} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1},$$

d'où l'on conclut

$$\log(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 351

(voir t. XV, p. 459) ;

PAR M. LE Dr J. DEL BECCARO,
Ancien élève de l'Ecole Normale de Pise.

Soient les équations

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0 \quad (\text{racines } \alpha, \alpha', \alpha''),$$
$$x^3 - p'x^2 + q'x - r' = 0 \quad (\text{racines } \beta, \beta', \beta''),$$

et posons

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} \quad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 27r^2 + 4q^3 - 18pqr + 4p^3r - p^2q^2,$$
$$\Delta' = 27r'^2 + 4q'^3 - 18p'q'r' + 4p'^3r' - p'^2q'^2.$$

Démontrer que l'équation suivante en t

$$t[t + (p^2 - 3q)(p'^2 - 3q'^2)]^2$$
$$- \frac{1}{16}\left[\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) \pm \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)\right]^2 = 0$$

a pour racines les quantités $-D_1^2$, $-D_2^2$, $-D_3^2$, $-D_4^2$, $-D_5^2$, $-D_6^2$. (MICHAEL ROBERTS.)

Du développement de la quantité D_1^2,

$$D_1^2 = (p^2p_1^2 - 4M) + 2pp'z_1 - 3z_1^2$$

où

$$M = p^2 q' + p'^2 q - 3qq',$$

et z_1 exprime la fonction

$$z_1 = \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'',$$

on déduit ceux de D_2^2, D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2 en y échangeant z_1 en z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, qui sont les valeurs différentes que peut prendre la fonction z. Laissant les α et changeant β' en β'' et *vice versâ* pour z_2, etc.

Puisque z_1, z_2, z_3 peuvent être regardées comme racines de l'équation

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N - \sqrt{\Delta\Delta'}) = 0,$$

et z_4, z_5, z_6 de l'autre équation

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N + \sqrt{\Delta\Delta'}) = 0$$

(voir *Nouvelles Annales*, M. Roberts, t. XV, p. 77), on peut calculer, par la théorie des fonctions symétriques, les coefficients des deux équations suivantes

$$t^3 + t^2 \Sigma D_1^2 + t \Sigma D_1^2 D_2^2 + D_1^2 D_2^2 D_3^2 = 0,$$
$$t^3 + t^2 \Sigma D_4^2 + t \Sigma D_4^2 D_5^2 + D_4^2 D_5^2 D_6^2 = 0,$$

qui ont pour racines $-D_1^2$, $-D_2^2$, $-D_3^2$ et $-D_4^2$, $-D_5^2$, $-D_6^2$.

$$\Sigma z_1 = pp',$$
$$\Sigma z_1^2 = p^2 p'^2 - 2M,$$
$$\Sigma z_1 z_2 = M,$$
$$\Sigma z_1 z_2^2 = pp'M - \frac{3}{2}(N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$
$$\Sigma z_1^2 z_2^2 = M^2 - pp'(N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

$$z_1 z_2 z_3 = \frac{1}{2}(N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

$$\Sigma z_1 z_2 z_3^2 = \frac{1}{2} pp'(N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

$$\Sigma z_1^2 z_2^2 z_3 = \frac{1}{2} M(N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

$$(z_1 z_2 z_3)^2 = \frac{1}{4}(N - \sqrt{\Delta\Delta'})^2;$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Sigma D_1^2 &= 3(p^2p'^2 - 4M) + 2pp'\Sigma z_1 - 3\Sigma z_1^2 \\ &= 2(p^2 - 3q)(p'^2 - 3q'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma D_1^2 D_2^2 &= 3(p^2p'^2 - 4M)^2 + 4(p^2p'^2 - 4M)pp'\Sigma z_1 \\ &\quad - 6(p^2p'^2 - 4M)\Sigma z_1^2 + 4p^2p'^2\Sigma z_1 z_2 \\ &\quad - 6pp'\Sigma z_1^2 z_2 + 9\Sigma z_1^2 z_2^2 = (p^2 - 3q)^2(p' - 3q')^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& D_1^2 D_2^2 D_3^2 \\ &= M^2(p^2p'^2 - 4M) + pp'N(9M - 2p^2p'^2) \\ &\quad - \frac{27}{4}(N^2 + \Delta\Delta') + \sqrt{\Delta\Delta'}\left(\frac{27}{2}N - 9pp'M + 2p^3p'^3\right) \\ &= -\Delta'' - \frac{27}{4}\Delta\Delta' + \sqrt{\Delta\Delta'}\cdot\frac{1}{2}\left(27N - 18pp'M + 4p^3p'^3\right),\end{aligned}$$

désignant par Δ'' le discriminant de l'équation

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}N = 0.$$

Mais au moyen des expressions

$$\frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'} = 4(27N - 18pp'M + 4p^3p'^3),$$

on a

$$\Delta'' = \frac{1}{16}\left[\Delta\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 + \Delta'\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 - 108\Delta\Delta'\right]$$

(voir *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 78) la fonction $D_1^2 D_2^2 D_3^2$ devient

$$D_1^2 D_2^2 D_3^2 = -\frac{1}{16}\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) - \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)\Big]^2.$$

De même les quantités ΣD_4^2, $\Sigma D_4^2 D_5^2$, $D_4^2 D_5^2 D_6^2$ s'expriment de la manière suivante :

$$\Sigma D_4^2 = \Sigma D_1^2,$$

$$\Sigma D_4^2 D_5^2 = \Sigma D_1^2 D_2^2,$$

$$\begin{aligned} D_4^2 D_5^2 D_6^2 &= -\Delta'' - \frac{27}{4}\Delta\Delta' - \sqrt{\Delta\Delta'}\cdot\frac{1}{2}(27\,N - 18pp'M + 4p^3p'^3) \\ &= -\frac{1}{16}\left[\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) + \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)\right]^2. \end{aligned}$$

De sorte que les équations en t deviennent

$$t[t + (p^2 - 2q)(p'^2 - 2q')]^2$$
$$-\frac{1}{16}\left[\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) \mp \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)\right]^2 = 0;$$

et sont satisfaites par les quantités $-D_1^2$, $-D_2^2$, $-D_3^2$, $-D_4^2$, $-D_5^2$, $-D_6^2$, comme il fallait le démontrer.

Corollaire. L'équation dont les racines sont les déterminants D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2 est

$$t[t - (p^2 - 2q)(p'^2 - 2q')]^2$$
$$+\frac{1}{16}\Big[\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) \pm \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 = 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 443

(voir t. XVII, p. 262);

PAR M. A. TERQUEM,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

Par un point fixe donné dans le plan d'une conique passe une sécante mobile, trouver le lieu géométrique du point d'intersection des deux normales menées à la conique aux deux points où la sécante coupe la conique. Quel est le lieu lorsque le point fixe est un foyer?

Démonstration. Prenons le point pour origine et rapportons la courbe à des parallèles aux axes principaux; l'équation de la conique sera de la forme

$$(1) \qquad Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0;$$

l'équation de la sécante est

$$y = ax.$$

Les abscisses x', x'' des points d'intersection seront données par les racines de l'équation

$$(2) \qquad x^2(Aa^2 + C) + x(Da + E) + E = 0.$$

Les ordonnées de ces points ont pour valeurs

$$y' = ux',$$
$$y'' = ax'',$$

Les équations des deux normales qui passent par les

points (x', y'), (x'', y'') sont de la forme

$$y - y' = \frac{2Ay' + D}{2Cx' + E}(x - x'),$$

$$y - y'' = \frac{2Ay'' + D}{2Cx'' + E}(x - x'').$$

Pour avoir les coordonnées des points d'intersection de ces droites, égalons les deux valeurs de x et aussi celles de y, on obtient ainsi deux équations qui donnent les coordonnées X et Y du point d'intersection en fonction de (x', y') (x'', y'') et du paramètre variable a. Remplaçant y' et y'' par leurs valeurs ax' et ax'', on trouve

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(2Ax' + D)(x - x') + (2Cx' + E)\,ax'}{2Cx' + E} \\ = \dfrac{(2Ax'' + E)(x - x'') + (2Cx'' + E)\,ax''}{2A\,ax'' + E}, \end{array} \right.$$

puis

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(2Cx' + E)(y - ax') + (2A\,ax' + D)\,x'}{2A\,ax' + D} \\ = \dfrac{(2Cx'' + E)(y - ax'') + (2A\,ax'' + D)\,x''}{2A\,ax'' + D}. \end{array} \right.$$

Les égalités (3) et (4) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2AEa(x - x' - x'') + 4Cax'x''(C - A) \\ + 2C[Ea(x' + x'') - Dx] + E(Ea - D) \end{array} \right\}(x' - x'') = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2CD[y - a(x' + x'')] + 4Aa^2x'x''(A - C) \\ + 2Aa[D(x' + x'') - Ey] + D(D - Ea) \end{array} \right\}(x' - x'') = 0.$$

Ces deux équations divisibles par $(x' - x'')$ ne contiennent plus que la somme des racines $(x' + x'')$ et le produit $x'x''$, auxquels on substituera leur valeur tirée de

l'équation (2)

$$x' + x'' = -\frac{Da + E}{Aa^2 + C}, \quad x'x'' = \frac{F}{Aa^2 + C}.$$

Chassant le dénominateur, on obtient deux équations du troisième degré en ordonnant par rapport à a :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & a^3[AE(2Ax + E)] + a^2[ADE - 2CD(Ax + E)] \\ & + a[2ACEx + 4CF(C - A) + E^2(2A - C)] \\ & - CD(2Cx + E) = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & a^3[AE(2Ay + D)] \\ & + a^2[4AF(C - A) + D^2(A - 2C) - 2ACDy] \\ & + a[2ACEy + DE(2A - C)] \\ & - CD(2Cy + D) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de a entre ces deux équations donne l'équation du lieu qui semble devoir être du sixième degré d'après une formule donnée par Bezout; mais elle ne monte qu'au troisième degré, à cause de la symétrie des coefficients.

Si a, b, c, d sont les coefficients de la première équation et a', b', c', d' ceux de la seconde, l'équation résultant de l'élimination sera

$$\begin{aligned} & [(ab').(bc') - (ac')^2 + (ad').(ab')](cd') \\ & - [(ab').(bd') - (ac').(ad')](bd') \\ & + [(ab')(cd') - (ad')^2](ad') = 0 \ (*). \end{aligned}$$

Chacun de ces déterminants $(ab' - ba')$, $(bc' - cb')$, etc., ne monte qu'au premier degré parce que les coefficients des termes du second degré sont égaux deux à deux et de

(*) Bezout, *Théorie générale des équations algébriques*, p. 301 ; 1779. J'ai donné cette indication. Tm.

signes contraires; donc la courbe cherchée est du troisième ordre.

2. Cherchons ce que devient le lieu lorsque le point est au foyer.

L'équation générale est, en prenant pour axe celui de la courbe et l'origine au foyer,

$$y^2 + x^2(1 - k^2) - 2pk^2x - p^2k^2 = 0,$$

p désigne la distance du foyer à la directrice et k le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice.

Faisons, dans les équations (5) et (6),

$$A = 1, \quad C = (1 - k^2), \quad D = 0,$$
$$E = -2pk^2, \quad F = -p^2k^2,$$

la première devient

$$a^2(pk^2 - x) - (1 - k^2)x - 12pk^4 = 0,$$

et la seconde

$$a^2y - apk^2 + (1 - k^2)y = 0.$$

Éliminant a entre ces deux équations, nous aurons

$$y^2(1 - 3k^2)^2 = (1 - k^2)(pk^2 - x)x - 2pk^2(pk^2 - x).$$

Le caractère

$$B^2 - 4AC = -4(1 - 3k^2)^2(1 - k^2)$$

donc la courbe peut présenter les trois variétés des coniques et est de même espèce que celle dont elle provient.

Si l'on prend pour équation de la courbe

$$a^2y^2 + b^2(x - c)^2 - a^2b^2 = 0,$$

l'équation du lieu deviendra, en remplaçant k par $\frac{c}{a}$ et

p par $\frac{b'}{c}$,

$$(7)\quad \begin{cases} y^2(b^2-2c^2)^2+a^2b^2x^2-cx(b^4+2a^2b^2) \\ \qquad +2b^4c^2=0. \end{cases}$$

La coordonnée du centre est

$$X=\frac{c(b^2+2a^2)}{2a^2}.$$

Le grand axe et le petit axe s'obtiennent en prenant la moitié de la différence des racines de l'équation (7) et en mettant la valeur de X dans la même équation, Y donnera le petit axe.

Ainsi

$$a'=\frac{c(2a^2-b^2)}{2a^2},$$

$$b'=\frac{bc(2a^2-b^2)}{2a(2c^2-b^2)}.$$

Pour passer de l'ellipse à l'hyperbole, il suffira de changer b^2 en $-b^2$.

Pour une parabole dont l'équation est

$$y^2=p(2x-p),$$

l'équation du lieu sera

$$y^2=\frac{h}{2}(x-p).$$

Note. Si dans l'équation (7) on fait

$$y=0,$$

on trouve

$$x=2c;$$

ainsi la conique passe par le second foyer.

Annulant une des quantités A, C, D, E le lieu devient une conique.

SUR LA VALEUR DE LA SOMME

$$\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}+\ldots+\frac{1}{l^m},$$

a, b,.., l étant les termes d'une progression arithmétique croissante;

PAR M. LEBESGUE.

Maintenant que les dérivées sont introduites dans les cours de mathématiques, et que par suite les aires paraboliques et hyperboliques se déterminent en passant d'une dérivée à la fonction primitive, peut-être conviendrait-il, à l'article des séries, de déduire la règle de convergence et de divergence de la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots \text{ à l'infini}$$

de la considération de l'aire d'un segment compris entre la courbe d'équation $y=\frac{1}{x^m}$, l'axe des x et deux ordonnées.

Tout en obtenant la règle de convergence et de divergence, qui reste la même quand 1, 2, 3,..., sont remplacés par a, $a+\delta$, $a+2\delta$,..., l'on aurait la valeur approchée d'un nombre limité de termes consécutifs.

Pour $y=\frac{1}{x}$ (coordonnées rectangulaires), l'aire est

$$\log\frac{l}{a},$$

pour $y=\frac{1}{x^m}$ l'aire est

$$\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{a^{m-1}}-\frac{1}{l^{m-1}}\right].$$

Si maintenant on fait $l=a+(n-1)\delta$, et que l'on nomme $y_1, y_2, y_3,\ldots, y_n$ les coordonnées équidistantes qui répondent aux abscisses $x_1=a$, $x_2=a+\delta$, $x_3=a+2\delta,\ldots$,

$x_n = a + (n-1)\delta$, l'aire du polygone formé en joignant les points de la courbe qui correspondent aux abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sera

$$\delta[y_1 + y_2 + \ldots + y_n] - \frac{1}{2}\delta(y_1 + y_n).$$

Cette aire se compose, 1° de l'aire hyperbolique déterminée plus haut ; 2° d'une somme de segments formés par les cordes qui unissent les sommets consécutivement deux à deux, somme toujours bien plus petite que $\frac{1}{2}(y_1 - y_n)$, ce qui se voit immédiatement sur la figure. On aura, en représentant par S cette somme de segments, 1° pour $m = 1$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{l}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l}\right) + \frac{1}{\delta}S + \frac{1}{\delta}\log\frac{l}{a};$$

2° quel que soit m

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \ldots + \frac{l}{l^m} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{l^m}\right)$$
$$+ \frac{1}{\delta}S + \frac{1}{(m-1)\delta}\left[\frac{1}{a^{m-1}} - \frac{1}{l^{m-1}}\right].$$

Pour $m = 1$, l et $\log l$ devenant infinis, la série $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ldots$, prolongée indéfiniment, est divergente.

Pour $m < 1$, le terme $-\frac{1}{(m-1)\delta}\cdot\frac{1}{l^{m-1}}$ devient $\frac{l^{1-m}}{\delta(1-m)}$, c'est-à-dire infini aussi bien que l, il y a encore divergence.

Pour $m > 1$, $\frac{1}{l^{m-1}}$ tend vers zéro, et il y a convergence quand l tend vers l'infini.

Cette démonstration, qui est bien connue, pourrait être introduite dans les Éléments. Si je la donne ici, c'est pour avoir occasion de faire remarquer qu'il y a un vice de rédaction à la page 465 des *Nouvelles Annales*, 1858.

La formule à employer est celle d'Euler :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\log n+\frac{1}{2n}-\frac{A}{4n^2}+\frac{B}{6n^4}-\ldots,$$

où $C=0,577,\ldots$; A, B, C... étant les nombres de Bernoulli.

La formule exposée plus haut donne

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=0,5+\log n+\frac{1}{2n}+S.$$

En négligeant S, la valeur $0,5+\log n+\frac{1}{2n}$ diffère peu de celle d'Euler.

Comme on a aussi

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a}=0,5+\log a+\frac{1}{2a}+S_1,$$

d'où

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a-1}=0,5+\log a-\frac{1}{2a}+S_1;$$

il en résulte

$$\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{1}{2a}-\log a+\log n+\frac{1}{2n}+S-S_1$$

et

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a-1}$$
$$+\frac{1}{2a}-\log a+\log n+\frac{1}{2n}+(S-S_1).$$

Pour $a=20$ on aurait, en négligeant $S-S_1$,

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=0,577\ldots+\log n+\frac{1}{2n},$$

qui diffère à peine de celle d'Euler. Mais cette dernière a l'avantage d'être un cas particulier d'une importante formule générale, qui introduit dans le calcul des séries les nombres de Bernoulli (*Calcul différentiel*, chap. V).

QUESTION D'EXAMEN A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1858);

PAR M. BEYNAC,
Professeur.

Si l'on fait tourner un angle droit dont le sommet est sur une courbe du second ordre, et que dans chacune de ces positions on joigne les points d'intersection des côtés de l'angle avec la courbe, par des droites, toutes ces droites vont se couper au même point de la normale à la courbe passant par le sommet de l'angle droit.

SOLUTION.

Si on rapporte la courbe à la tangente au sommet fixe et à la normale qui passe par le même point, son équation est

$$(1)\qquad y^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = 0,$$

car la courbe passe par l'origine, et pour $x = 0$, y doit passer deux fois par zéro.

Soit $y - mx = 0$ l'équation de l'un des côtés OA de l'angle, $y + \frac{1}{m}x = 0$ est celle de l'autre côté OB.

Le produit

$$(2)\qquad y^2 - \left(m - \frac{1}{m}\right)xy - x^2 = 0$$

représente le système des deux droites OA, OB. La différence des équations (1) et (2) est celle d'un lieu passant par un point commun aux deux premiers. Cette équation est

$$\left(B + m - \frac{1}{m}\right)xy + (C + 1)x^2 + Ex = 0.$$

Divisant par x, on supprime $x = 0$ qui représente l'axe

des y, et l'on a

$$\left(B + m - \frac{1}{m}\right) y + (C+1)x + E = 0,$$

ou l'équation de la droite AB. Pour $y = 0$, on trouve

$$x = -\frac{E}{C+1} = \text{constante}$$

et indépendante de m, ce qui justifie le théorème.

Remarque I. On déduit de là un moyen très-simple de construire une normale ou une tangente en un point donné d'une courbe du second ordre en ne faisant usage que de l'équerre.

Remarque II. Le résultat précédent s'appuie sur ce seul fait que dans l'équation (2) le coefficient de x^2 est constant et égal à -1. Or ce coefficient provient du produit des coefficients angulaires des droites OA, OB. Le théorème subsiste lors même que l'angle AOB n'est pas constant; il suffit que le produit des coefficients angulaires des droites qui forment l'angle soit constant. C'est ce qui arrive quand le point O est le centre d'une courbe du second ordre et qu'on mène par ce point des systèmes de diamètres conjugués.

Remarque III. On voit aussi les avantages qu'il y a à rapporter une courbe à la tangente et à la normale correspondante.

Note du Rédacteur. Le théorème appartient à Fregier (*Annales* de Gergonne, t. VI, p. 229, 1816; *Nouvelles Annales*, t. II, p. 186, 1843). Il y a un théorème analogue pour les surfaces du second degré. En général, toute corde inscrite dans une conique enveloppe une conique, lorsqu'elle est vue d'un point fixe sous un angle constant (Poncelet); ce point étant sur la conique et l'angle étant droit, la conique enveloppe se réduit à un point.

NOTE SUR LES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt les remarques que M. Lebesgue vient de publier dans les *Nouvelles Annales* (t. XVII, p. 384-391) sur la résolution des équations biquadratiques, et aussi la Note de M. Aronhold qui se rapporte au même sujet. Dans ce qui suit, je me propose de faire voir comment la solution de ce dernier peut être ramenée à celle d'Euler. Pour cela je donne l'énoncé du théorème suivant sur les déterminants, qu'on peut démontrer facilement. Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & & x_1 & x_2 \\ \ldots & & & \ldots & \\ x_n & x_1 & & x_{n-2} & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

On sait que Δ a pour facteurs les valeurs que prend la fonction

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \ldots + \omega^{n-1} x_n,$$

en substituant pour ω successivement les racines de l'équation

$$\omega^n - 1 = 0. \text{ (*)}$$

(*) Si les x_1, x_2,..., x_n sont disposés symétriquement, alors il faut que n soit un nombre impair.

Considérons maintenant l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

et posons

$$a^2\varpi = b^2 - ac,$$

$$12a^2\mu = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$8a^3\lambda = ace + 2bed - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

$$l = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^3},$$

$$m = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^3},$$

et si Δ représente le déterminant de M. Aronhold, on a (en écrivant dans son équation θ au lieu de λ)

$$\begin{vmatrix} \frac{\theta}{a} & -l^{\frac{1}{3}} & -m^{\frac{1}{3}} \\ -l^{\frac{1}{3}} & -m^{\frac{1}{3}} & \frac{\theta}{a} \\ -m^{\frac{1}{3}} & +\frac{\theta}{a} & -l^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta}{a^3},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{d\Delta}{de} = -a\varpi + \theta.$$

Mais si θ_1, θ_2, θ_3 sont les racines de l'équation

$$\Delta = 0,$$

nous tirons, en vertu du théorème que je viens d'énoncer,

$$\frac{\theta_1}{a} = l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\theta_2}{a} = \omega l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\theta_3}{a} = \omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}}$$

(ω est une racine cubique imaginaire de l'unité), en

sorte que

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\Delta}{dl}\right)_1 = -\varpi + l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\Delta}{dl}\right)_2 = -\varpi + \omega\, l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\Delta}{dl}\right)_3 = -\varpi + \omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}}.$$

Or les seconds membres de ces dernières équations sont précisément les racines de la réduite du troisième degré dans la méthode d'Euler.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 49);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

---

§ III. — *Intersection d'un plan avec une surface du second ordre.*

45. Soient

$$(1)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ \quad + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 \end{array}\right\} = 0,$$

l'équation d'une surface du second ordre, et

$$(2)\qquad m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0$$

l'équation d'un plan.

L'élimination successive de x_1 et x_2 entre les équations (1) et (2) donnera les projections de la courbe d'intersection sur les plans des $x_2\,x_3$ et $x_1\,x_3$.

On trouvera ainsi, après avoir posé

$$(3)\qquad \mathrm{T} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad a_{r,s} = a_{s,r},$$

pour la projection sur le plan des $x_2 x_3$,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}} x_2^2 + \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{22}} x_3^2 + \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{33}} x_4^2 \\ &- 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{23}} x_2 x_3 - 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{24}} x_2 x_4 \\ &- 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{34}} x_3 x_4 = 0; \end{aligned} \right.$$

et pour la projection sur le plan des $x_1 x_3$,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}} x_1^2 + \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{11}} x_3^2 + \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{33}} x_4^2 \\ &- 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{13}} x_1 x_3 - 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{14}} x_1 x_4 \\ &- 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{34}} x_3 x_4 = 0. \end{aligned} \right.$$

46. Je vais donner d'abord les développements des coefficients de ces deux équations

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}} &= - a_{11} m_2^2 - a_{22} m_1^2 + 2 a_{12} m_1 m_2, \\ \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{44}} &= - a_{11} m_3^2 - a_{33} m_1^2 + 2 a_{13} m_1 m_3, \\ \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{44}} &= - a_{22} m_3^2 - a_{33} m_2^2 + 2 a_{23} m_2 m_3, \\ \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{33}} &= - a_{11} m_4^2 - a_{44} m_1^2 + 2 a_{14} m_1 m_4, \\ \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{33}} &= - a_{22} m_4^2 - a_{44} m_2^2 + 2 a_{24} m_2 m_4. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2T}{da_{23}\,da_{44}} &= a_{11}\,m_2\,m_3 + a_{23}\,m_1^2 - a_{12}\,m_1\,m_3 - a_{13}\,m_1\,m_2,\\
\frac{d^2T}{da_{13}\,da_{44}} &= a_{22}\,m_1\,m_3 + a_{13}\,m_2^2 - a_{12}\,m_2\,m_3 - a_{23}\,m_1\,m_2,\\
\frac{d^2T}{da_{24}\,da_{33}} &= a_{11}\,m_2\,m_4 + a_{24}\,m_1^2 - a_{12}\,m_1\,m_4 - a_{14}\,m_1\,m_2,\\
\frac{d^2T}{da_{14}\,da_{33}} &= a_{22}\,m_1\,m_4 + a_{14}\,m_2^2 - a_{12}\,m_2\,m_4 - a_{24}\,m_1\,m_2,\\
\frac{d^2T}{da_{34}\,da_{22}} &= a_{11}\,m_3\,m_4 + a_{34}\,m_1^2 - a_{13}\,m_1\,m_4 - a_{14}\,m_1\,m_3,\\
\frac{d^2T}{da_{34}\,da_{11}} &= a_{22}\,m_3\,m_4 + a_{34}\,m_2^2 - a_{23}\,m_2\,m_4 - a_{24}\,m_2\,m_3.
\end{aligned}\right.$$

Les relations d'identité que je vais écrire se déduisent des formules générales

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&P\,\frac{d^2P}{da_{rs}\,da_{r_1 s_1}} = \frac{dP}{da_{rs}}\,\frac{dP}{da_{r_1 s_1}} - \frac{dP}{da_{rs_1}}\,\frac{dP}{da_{r_1 s}},\\
&\frac{d^2P}{da_{rs}\,da_{r_1 s_1}} = -\frac{d^2P}{da_{rs_1}\,da_{r_1 s}}.
\end{aligned}\right.$$

On a en premier lieu

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
T\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} &= \frac{dT}{da_{33}}\,\frac{dT}{da_{44}} - \left(\frac{dT}{da_{34}}\right)^2,\\
T\,\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}} &= \frac{dT}{da_{22}}\,\frac{dT}{da_{44}} - \left(\frac{dT}{da_{24}}\right)^2,\\
T\,\frac{d^2T}{da_{11}\,da_{44}} &= \frac{dT}{da_{11}}\,\frac{dT}{da_{44}} - \left(\frac{dT}{da_{14}}\right)^2,\\
T\,\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}} &= \frac{dT}{da_{22}}\,\frac{dT}{da_{33}} - \left(\frac{dT}{da_{23}}\right)^2,\\
T\,\frac{d^2T}{da_{11}\,da_{33}} &= \frac{dT}{da_{11}}\,\frac{dT}{da_{33}} - \left(\frac{dT}{da_{13}}\right)^2,\\
T\,\frac{d^2T}{da_{11}\,da_{22}} &= \frac{dT}{da_{11}}\,\frac{dT}{da_{22}} - \left(\frac{dT}{da_{12}}\right)^2.
\end{aligned}\right.$$

On aura, en second lieu,

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
-m_1^2\frac{dT}{da_{44}} &= \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{33}}\,\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{22}} - \left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2,\\
-m_1^2\frac{dT}{da_{33}} &= \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{22}} - \left(\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}\right)^2,\\
-m_1^2\frac{dT}{da_{34}} &= \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}} + \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}};
\end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
-m_1^2\frac{dT}{da_{22}} &= \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}}\,\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}} - \left(\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}\right)^2,\\
-m_1^2\frac{dT}{da_{24}} &= \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}} + \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}\,\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}},\\
-m_1^2\frac{dT}{da_{23}} &= \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}}\,\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}} + \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}};
\end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
-m_2^2\frac{dT}{da_{44}} &= \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{33}}\,\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{11}} - \left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}}\right)^2,\\
-m_2^2\frac{dT}{da_{33}} &= \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{11}} - \left(\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{14}}\right)^2,\\
-m_2^2\frac{dT}{da_{34}} &= \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{11}\,da_{34}} + \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{14}};
\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
-m_2^2\frac{dT}{da_{11}} &= \frac{d^2T}{da_{11}\,da_{33}}\,\frac{d^2T}{da_{11}\,da_{44}} - \left(\frac{d^2T}{da_{11}\,da_{34}}\right)^2,\\
-m_2^2\frac{dT}{da_{14}} &= \frac{d^2T}{da_{11}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{14}} + \frac{d^2T}{da_{11}\,da_{34}}\,\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}},\\
-m_2^2\frac{dT}{da_{13}} &= \frac{d^2T}{da_{11}\,da_{33}}\,\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}} + \frac{d^2T}{da_{11}\,da_{34}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{14}};
\end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad\left\{\;-m_3^2\frac{dT}{da_{44}} = \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{11}}\,\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{22}} - \left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{12}}\right)^2.\right.$$

Enfin je rappellerai les relations suivantes qui résul-

tent de la propriété fondamentale des déterminants :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&m_1 \frac{dT}{da_{14}} + m_2 \frac{dT}{da_{24}} + m_3 \frac{dT}{da_{34}} + m_4 \frac{dT}{da_{44}} = 0,\\
&m_1 \frac{dT}{da_{13}} + m_2 \frac{dT}{da_{23}} + m_3 \frac{dT}{da_{33}} + m_4 \frac{dT}{da_{43}} = 0,\\
&m_1 \frac{dT}{da_{12}} + m_2 \frac{dT}{da_{22}} + m_3 \frac{dT}{da_{32}} + m_4 \frac{dT}{da_{42}} = 0,\\
&m_1 \frac{dT}{da_{11}} + m_2 \frac{dT}{da_{21}} + m_3 \frac{dT}{da_{31}} + m_4 \frac{dT}{da_{41}} = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&m_1 \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}} + m_2 \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}} + m_3 \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{33}} = 0,\\
&m_1 \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{12}} + m_2 \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{22}} + m_3 \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{32}} = 0,\\
&m_1 \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{11}} + m_2 \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{21}} + m_3 \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{31}} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Ces préliminaires étant posés, nous allons discuter les équations (4) et (5).

Première hypothèse. $\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ *est différent de zéro.*

47. En formant dans l'équation (4) le carré par rapport à la variable x_2, on obtiendra

$$\left.\begin{aligned}
X_1^2 &+ \left[\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}} - \left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2\right] x_3^2\\
&+ \left[\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{22}} - \left(\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}\right)^2\right] x_4^2\\
&- 2\left[\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}} + \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}\right] x_3\,x_4
\end{aligned}\right\} = 0,$$

après avoir posé

$$X_1 = \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,x_2 - \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\,x_3 - \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}\,x_4\,;$$

ou bien, en ayant égard aux relations (9),

$$(16)\quad X_1^2 - m_1^2\left(\frac{dT}{da_{44}}\,x_3^2 - 2\,\frac{dT}{da_{34}}\,x_3\,x_4 + \frac{dT}{da_{33}}\,x_4^2\right) = 0.$$

Nous supposerons toujours que m_1 et m_2 ne sont pas nuls ; ce n'est qu'à la fin de la discussion que nous étudierons ce cas exceptionnel.

Premier cas. $\frac{dT}{da_{44}}$ *est différent de zéro.*

En formant le carré par rapport à x_3 et en posant

$$\frac{dT}{da_{44}} X_2 = \frac{dT}{da_{44}} x_3 - \frac{dT}{da_{34}} x_4,$$

l'équation (16) pourra s'écrire

$$X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{44}} X_2^2 - m_1^2 \frac{\frac{dT}{da_{33}} \frac{dT}{da_{44}} - \left(\frac{dT}{da_{34}}\right)^2}{\frac{dT}{da_{44}}} x_4^2 = 0;$$

ou bien, d'après la première des relations (8),

$$(17) \qquad X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{44}} X_2^2 - m_1^2 \frac{T \frac{d^2T}{da_{33}\, da_{44}}}{\frac{dT}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

De cette dernière équation, nous conclurons que

(I) $\frac{d^2T}{da_{33}\, da_{44}}$ *et* $\frac{dT}{da_{44}}$ *étant différents de zéro* (*).

Si $\frac{dT}{da_{44}} > 0$, { il y a *intersection*, lorsque $T \gtrless 0$,
il y a *tangence*, lorsque $T = 0$,

Si $\frac{dT}{da_{44}} < 0$, { il y a *non-intersec.*, lorsque $T \frac{d^2T}{da_{33}\, da_{44}} > 0$,
il y a *intersection*, lorsque $T \frac{d^2T}{da_{33}\, da_{44}} < 0$,
il y a *tangence*, lorsque $T = 0$.

(*) Ces utiles et beaux *criterium*, résultats d'une discussion consciencieuse, ne se trouvent, à ce que je sache, nulle part. Tr.

Le contact résulte de ce que l'hypothèse $T=0$, introduite dans l'équation de la projection sur le plan des $x_1 x_2$, donne aussi un point ou deux droites qui se coupent; car si l'on fait subir à l'équation (5) les transformations que nous venons d'effectuer, les coefficients de x_4^2 ne différeront que par le changement de m_1 en m_2.

48. Lorsqu'il y a tangence, les coordonnées du point de contact sont données par les équations :

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} x_2 - \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}} x_3 - \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}} x_4 = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{dT}{da_{44}} x_3 - \dfrac{dT}{da_{34}} x_4 = 0. \end{array}\right.$$

Par des transformations faciles, reposant sur les relations d'identité que j'ai établies d'abord, on arrive aux valeurs suivantes :

$$(18)\qquad x_1 = \frac{dT}{da_{14}},\quad x_2 = \frac{dT}{da_{24}},\quad x_3 = \frac{dT}{da_{34}},\quad x_4 = \frac{dT}{da_{44}}.$$

49. Deuxième cas. $\dfrac{dT}{da_{44}}$ *est nul.*

L'équation (16) devient alors

$$(19)\qquad X_1^2 - m_1^2\left(\frac{dT}{da_{33}} x_4^2 - 2\frac{dT}{da_{34}} x_3 x_4\right) = 0,$$

et la première des identités (8) donne

$$(20)\qquad T\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} = -\left(\frac{dT}{da_{34}}\right).$$

Si $\dfrac{dT}{da_{34}}$ est différent de zéro, il en sera de même de T, et réciproquement; et ces deux expressions s'annuleront en

même temps, car $\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ a été supposé différent de zéro.

Lorsque T n'est pas nul, l'équation (19) nous montre qu'il y a intersection. Lorsque T est nul, l'équation (19) se réduit, d'après la remarque que nous venons de faire, à

$$X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{33}} x_4^2 = 0;$$

mais alors la projection sur le plan des $x_1\, x_3$ a pour équation

$$X_1'^2 - m_2^2 \frac{dT}{da_{33}} x_4^2 = 0,$$

en représentant par X_1' la fonction linéaire

$$\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} x_1 - \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}} x_3 - \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{14}} x_4.$$

De là nous concluons que

(II) $\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ *étant différent de zéro et* $\frac{dT}{da_{44}}$ *nul :*

Si $T \gtrless 0$, il y a *intersection;*

Si $T = 0$,
- il y a *non-intersection*, lorsque $\frac{dT}{da_{33}} < 0$,
- il y a *intersection*, lorsque $\frac{dT}{da_{33}} > 0$,
- il y a *tangence*, lorsque $\frac{dT}{da_{33}} = 0$.

Dans le cas où T est nul, l'intersection se compose de deux droites parallèles, et le contact a lieu suivant une droite qui a pour équations

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} x_2 - \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}} x_3 - \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}} x_4 = 0, \\ \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} x_1 - \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}} x_3 - \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{14}} x_4 = 0. \end{cases}$$

SECONDE HYPOTHÈSE.

$\frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{44}}$ *est nul et* $\frac{d^2 T}{da_{22}\, da_{44}}$ *différent de zéro.*

50. Si l'on remonte à l'équation (4) et qu'on forme le carré par rapport à x_3, il vient

$$X_1^2 - \left(\frac{d^2 T}{da_{44}\, da_{23}}\right)^2 x_2^2 + \left[\frac{d^2 T}{da_{22} da_{44}} \frac{d^2 T}{da_{22} da_{33}} - \left(\frac{d^2 T}{da_{22} da_{34}}\right)^2\right] x_4^2$$
$$-2\left[\frac{d^2 T}{da_{22} da_{44}} \frac{d^2 T}{da_{33} da_{24}} + \frac{d^2 T}{da_{44} da_{23}} \frac{d^2 T}{da_{22} da_{34}}\right] x_2\, x_4 = 0,$$

après avoir posé

$$X_1 = \frac{d^2 T}{da_{22} da_{44}} x_3 - \frac{d^2 T}{da_{44} da_{23}} x_2 - \frac{d^2 T}{da_{22} da_{34}} x_4.$$

Or la première des identités (9) devient

$$(22) \qquad m_1^2 \frac{dT}{da_{44}} = \left(\frac{d^2 T}{da_{44} da_{23}}\right)^2,$$

ce qui nous montre que $\frac{dT}{da_{44}}$ est essentiellement positif.

Si l'on fait intervenir les relations (10) et (22), l'équation précédente deviendra

$$(23) \quad X_1^2 - m_1^2 \left(\frac{dT}{da_{44}} x_2^2 - 2 \frac{dT}{da_{24}} x_2\, x_4 + \frac{dT}{da_{22}} x_4^2\right) = 0.$$

PREMIER CAS. $\frac{dT}{da_{44}}$ *est différent de zéro.*

Si l'on pose

$$\frac{dT}{da_{44}} X_2 = \frac{dT}{da_{44}} x_2 - \frac{dT}{da_{24}} x_4,$$

puis qu'on ait égard à la seconde des relations (8), l'équa-

tion (23) pourra s'écrire

$$X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{44}} X_2^2 - m_1^2 \frac{T \frac{d^2T}{da_{22}\, da_{44}}}{\frac{dT}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

Nous avons déjà remarqué que $\frac{dT}{da_{44}}$ était positif; nous voyons donc, à l'inspection de cette dernière équation, qu'il y aura intersection tant que T sera différent de zéro et tangence lorsqu'il sera nul. D'où

(III) $\frac{d^2T}{da_{33}\, da_{44}}$ *étant nul*, et $\frac{dT}{da_{44}}$ *différent de zéro*, et alors il est positif :

$$\begin{cases} \text{Il y a } \textit{intersection}, \text{ lorsque } T \gtrless 0, \\ \text{Il y a } \textit{tangence}, \text{ lorsque } T = 0. \end{cases}$$

51. Deuxième cas. $\frac{dT}{da_{44}}$ *est nul.*

L'équation (23) devient

$$(24) \qquad X_1^2 - m_1^2 \left(\frac{dT}{da_{22}} x_2^2 - 2 \frac{dT}{da_{24}} x_2 x_4 \right) = 0.$$

La seconde des identités (8) donne

$$(25) \qquad T \frac{d^2T}{da_{22}\, da_{44}} = - \left(\frac{dT}{da_{24}} \right)^2.$$

Par suite, T et $\frac{dT}{da_{24}}$ s'annuleront en même temps, car $\frac{d^2T}{da_{22}\, da_{44}}$ est différent de zéro, par hypothèse. Si T n'est pas nul, on voit qu'il y a intersection.

Si

$$T = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dT}{da_{24}} = 0,$$

on déduit d'abord de la relation (22)

$$\frac{d^2T}{da_{44}\, da_{23}} = 0;$$

de la seconde des relations (10)

$$\frac{d^2T}{da_{33}\, da_{24}} = 0;$$

et enfin de la seconde des relations (9)

(26) $$\frac{dT}{da_{33}} = 0.$$

En outre la première des relations (8) et la première des relations (14) donneront successivement

$$\frac{dT}{da_{34}} = 0, \quad \frac{dT}{da_{14}} = 0;$$

ce qui nous conduit aux équations suivantes pour les projections de la courbe d'intersection sur les plans des $x_2 x_3$ et $x_1 x_3$:

(27) $$\left\{ \begin{aligned} & X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{22}} x_4^2 = 0, \\ & X_1'^2 - m_2^2 \frac{dT}{da_{11}} x_4^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Or la dernière des identités (8) nous donne

$$\frac{dT}{da_{11}} \frac{dT}{da_{22}} = \left(\frac{dT}{da_{12}}\right)^2,$$

puisque $T = 0$; ceci nous indique que $\frac{dT}{da_{22}}$ et $\frac{dT}{da_{11}}$ sont toujours de même signe.

Mais on a, en outre, d'après la quatrième et la cinquième des identités (8),

$$\frac{dT}{da_{23}} = 0, \quad \frac{dT}{da_{13}} = 0;$$

puis d'après (14)

$$(28) \quad \begin{cases} m_1 \dfrac{dT}{da_{12}} + m_2 \dfrac{dT}{da_{22}} = 0, \\ m_1 \dfrac{dT}{da_{11}} + m_2 \dfrac{dT}{da_{21}} = 0. \end{cases}$$

On voit, d'après ces dernières relations, que $\frac{dT}{da_{22}}$ et $\frac{dT}{da_{11}}$ s'annulent en même temps. Nous pourrons donc tirer des équations (27) les conclusions qui forment la seconde partie du tableau suivant:

(IV) $\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ et $\dfrac{dT}{da_{44}}$ *étant nuls tous deux.*

Si $T \gtrless 0$, il y a *intersection*;

Si $T = 0$,
- il y a *non-intersection*, lorsque $\dfrac{dT}{da_{22}} < 0$,
- il y a *intersection*, lorsque $\dfrac{dT}{da_{22}} > 0$,
- il y a *tangence*, lorsque $\dfrac{dT}{da_{22}} = 0$.

52. Pour que les conclusions que nous venons de déduire soient légitimes, il faut que les hypothèses admises dans ce dernier cas soient compatibles; ou, en d'autres termes, que les équations (27), qui représentent alors des plans parallèles au plan des $x_1 x_2$, admettent les mêmes racines; c'est ce que nous allons vérifier.

Les équations (27), ou mieux les équations (4) et (5),

deviennent, en ayant égard aux hypothèses actuelles,

$$(27\ bis)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}}x_3^2 - 2\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}x_3 x_4 + \dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}}x_4^2 = 0, \\ \dfrac{d^2T}{da_{11}\,da_{44}}x_3^2 - 2\dfrac{d^2T}{da_{11}\,da_{34}}x_3 x_4 + \dfrac{d^2T}{da_{11}\,da_{33}}x_4^2 = 0. \end{cases}$$

Pour que ces deux équations admettent les mêmes racines en x_3, il faut et il suffit que

$$(29)\qquad \frac{\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}}}{\dfrac{d^2T}{da_{11}\,da_{44}}} = \frac{\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}}{\dfrac{d^2T}{da_{11}\,da_{34}}} = \frac{\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}}}{\dfrac{d^2T}{da_{11}\,da_{33}}}.$$

Or des relations (28), puis des relations (16) et des relations analogues obtenues en changeant $\dfrac{dT}{da_{44}}$ en $\dfrac{dT}{da_{33}}$, on déduit immédiatement

$$\frac{dT}{da_{22}} = \lambda\frac{dT}{da_{12}}, \qquad \frac{dT}{da_{11}} = \frac{1}{\lambda}\frac{dT}{da_{21}};$$

$$\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{22}} = \lambda\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{12}}, \qquad \frac{a^2T}{da_{44}\,da_{11}} = \frac{1}{\lambda}\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{12}};$$

$$\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{22}} = \lambda\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{12}}, \qquad \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{11}} = \frac{1}{\lambda}\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{12}};$$

d'où l'on conclut

$$(30)\qquad \frac{\dfrac{dT}{da_{22}}}{\dfrac{dT}{du_{11}}} = \lambda^2, \qquad \frac{\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{22}}}{\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{11}}} = \lambda^2, \qquad \frac{\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{22}}}{\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{11}}} = \lambda^2.$$

Si l'on introduit enfin ces dernières relations dans les premières équations des groupes (10) et (12), on arrive à

$$(31)\qquad \frac{\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}}{\dfrac{d^2T}{da_{11}\,da_{34}}} = \lambda^2.$$

Les relations (29) se trouvent ainsi vérifiées.

TROISIÈME HYPOTHÈSE.

$$\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}=0,\qquad \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}}=0,\quad \text{et}\quad \frac{d^2T}{da_{44}\,d_{23}}\gtrless 0.$$

53. L'équation de la projection sur le plan des x_2x_3, qui devient alors

$$\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}x_2x_3+\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}x_2x_4+\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}x_3x_4$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}}x_4^2=0,$$

pourra s'écrire de la manière suivante :

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}x_2+\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}x_4\right)\left(x_3+\frac{\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}}{\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}}x_4\right)\\ &-\frac{2\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}+\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}}\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}}{\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}}x_4^2=0.\end{aligned}\right.$$

Or, de la première des formules (7), on déduit la relation

$$(33)\qquad T\frac{d^2T}{da_{23}\,da_{44}}=\frac{dT}{da_{44}}\frac{dT}{da_{23}}-\frac{dT}{da_{43}}\frac{dT}{da_{24}},$$

qui fournit, en ayant égard aux identités (9) et (10) et aux hypothèses admises, la relation suivante :

$$(34)\ -m_1^4T=\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\left(2\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}+\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}}\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right).$$

L'équation (29) prendra dès lors la forme

$$X_1X_2+\frac{m_1^4\,T}{\left(\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2}x_4^2=0,$$

d'où l'on conclut immédiatement :

$$\text{(V)}\quad \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} \text{ et } \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}} \text{ étant nuls, et } \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}} \text{ diffèrent de zéro.}$$

Il y a *intersection*, lorsque $T \lesseqgtr 0$;
Il y a *tangence*, lorsque $T = 0$.

Dans ce cas on a

$$(35)\qquad m_1^2 \frac{dT}{da_{44}} = \left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2,$$

c'est-à-dire que $\frac{dT}{da_{44}}$ est nécessairement positif et ne peut être nul.

Les coordonnées du point de contact sont encore fournies par les équations (18); la vérification en est facile.

Quatrième hypothèse.

$$\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{33}} = 0,\quad \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{22}} = 0,\quad \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}} = 0.$$

54. L'équation de la projection sur le plan des $x_2\,x_3$ sera dès lors

$$(36)\qquad \frac{d^2T}{da_{33}da_{24}}\,x_2 x_4 + \frac{d^2T}{da_{22}da_{34}}\,x_3 x_4 - \frac{1}{2}\,\frac{d^2T}{da_{22}da_{33}}\,x_4^2 = 0;$$

c'est l'équation d'une droite. Voyons maintenant ce que devient la projection sur le plan des $x_1\,x_3$.

Les relations (34) et (35) donnent d'abord

$$(37)\qquad \frac{dT}{da_{44}} = 0,\quad \text{et}\quad T = 0;$$

puis l'on déduit des identités (8)

$$\frac{dT}{da_{34}} = 0,\quad \frac{dT}{da_{24}} = 0,\quad \frac{dT}{da_{14}} = 0;$$

des identités (9) et (10)

$$(38)\qquad m_1^2 \frac{dT}{da_{33}} = \left(\frac{d^2T}{da_{33}da_{24}}\right)^2; \quad m_2^1 \frac{dT}{da_{22}} = \left(\frac{d^2T}{da_{22}da_{34}}\right)^2;$$

des identités (11) et (13), ou des formules (15)

$$\frac{d^2T}{da_{44}da_{13}} = 0, \quad \frac{d^2T}{da_{44}da_{12}} = 0, \quad \frac{d^2T}{da_{44}da_{11}} = 0.$$

On voit alors que l'équation (5), projection de la courbe d'intersection sur le plan des $x_1\, x_3$, se réduit à

$$(39)\qquad \frac{d^2T}{da_{33}da_{14}} x_1 x_4 + \frac{d^2T}{da_{11}da_{34}} x_3 x_4 - \frac{1}{2}\frac{d^2T}{da_{11}da_{33}} x_4^2 = 0;$$

c'est encore une droite. Le plan coupe la surface suivant une droite; l'autre droite est à l'infini. Cela aura lieu tant que $\frac{dT}{da_{33}}$ et $\frac{dT}{da_{22}}$ ne seront pas nuls à la fois, et, dans ce cas, ils sont nécessairement positifs (35).

Si l'on a à la fois

$$\frac{dT}{da_{33}} = 0, \quad \frac{dT}{da_{22}} = 0,$$

il en résulte des relations (35)

$$\frac{d^2T}{da_{33}da_{24}} = 0, \quad \frac{d^2T}{da_{22}da_{34}} = 0,$$

puis des relations (11) et (12)

$$\frac{d^2T}{da_{33}da_{14}} = 0, \quad \frac{d^2T}{da_{11}da_{34}} = 0,$$

c'est-à-dire que la première droite est aussi à l'infini; le

plan est tangent à l'infini. Ainsi

$$\text{(VI)} \quad \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{44}}, \quad \frac{d^2 T}{da_{22}\, da_{44}}, \quad \frac{d^2 T}{da_{23}\, da_{44}} \text{ étant nuls,}$$

On a

$$T = 0, \quad \frac{dT}{da_{44}} = 0,$$

et

Il y a *intersection*, lorsque $\frac{dT}{da_{33}}$ et $\frac{dT}{da_{22}}$ ne sont pas nuls à la fois.

Il y a *tangence à l'infini* ou *coïncidence*, lorsque $\frac{dT}{da_{33}} = 0$ et $\frac{dT}{da_{22}} = 0$.

Cinquième hypothèse.

55. Quel que soit le plan donné, un au moins des coefficients m_1, m_2, m_3 n'est pas nul ; c'est la ligne correspondante au coefficient non nul que nous conviendrons de placer la *première* dans le déterminant T. Cette précaution étant toujours prise, il en résulte que la quantité m_1 ne saurait être supposée nulle.

Il ne restera donc plus à examiner qu'une seule hypothèse, celle où m_2 est nul, car la valeur de m_3 ne joue aucun rôle dans les discussions précédentes.

Or si $m_2 = 0$, le plan sécant est parallèle à l'axe des x_2, il suffit alors de discuter la projection sur le plan de $x_1\, x_3$, et les résultats obtenus dans les discussions précédentes se maintiendront évidemment.

56. Je vais maintenant résumer les conclusions qui viennent d'être établies, en en présentant le tableau sous divers points de vue.

Premier résumé.

I. $\frac{dT}{da_{44}} > 0.$
- *intersection*, lorsque $T \gtrless 0$,
- *tangence*, lorsque $T = 0$.

II. $\frac{dT}{da_{44}} < 0.$
- *non-intersection*, lorsque $T \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{44}} > 0$,
- *intersection*, lorsque $T \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{44}} < 0$,
- *tangence*, lorsque $T = 0$.

III. $\frac{dT}{da_{44}} = 0.$
- PREMIER CAS. $T \gtrless 0$. . . . . *intersection*.
- DEUXIÈME CAS. $T = 0$.
  - $\frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{44}} \gtrless 0$,
    - *non-intersection*, si $\frac{dT}{da_{33}} < 0$,
    - *intersection* (droites), si $\frac{dT}{da_{33}} > 0$,
    - *tangence* (droite), si $\frac{dT}{da_{33}} = 0$;
  - $\frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{44}} = 0$, et $\frac{d^2 T}{da_{22}\, da_{44}} \gtrless 0$,
    - *non-intersection*, si $\frac{dT}{da_{22}} < 0$,
    - *intersection* (droites), si $\frac{dT}{da_{22}} > 0$,
    - *tangence* (droite), si $\frac{dT}{da_{22}} = 0$;
  - $\frac{d^2 T}{da_{38}\, da_{44}} = 0$, et $\frac{d^2 T}{da_{22}\, da_{44}} = 0$,
    - *intersection* (droites), si $\frac{dT}{da_{33}}$ et $\frac{dT}{da_{22}}$ ne sont pas nuls,
    - *tangence à l'infini* ou *coïncidence*, si $\frac{dT}{da_{33}} = 0$ et $\frac{dT}{da_{22}} = 0$.

Second résumé.

I°. $T > 0$. $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dT}{da_{44}} > 0 \quad \text{ou} \quad = 0, & \textit{intersection;} \\ \dfrac{dT}{da_{44}} < 0, & \left\{\begin{array}{ll} \textit{non-intersection,} & \text{si } \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} > 0, \\ \textit{intersection} & \text{si } \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} < 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$

II°. $T < 0$. $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dT}{da_{44}} > 0 \quad \text{ou} \quad = 0, & \textit{intersection;} \\ \dfrac{dT}{da_{44}} < 0, & \left\{\begin{array}{ll} \textit{non-intersection,} & \text{si } \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} < 0, \\ \textit{intersection,} & \text{si } \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} > 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$

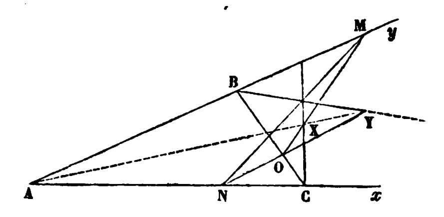
III°. $T = 0$. $\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dT}{da_{44}} \gtrless 0, & \textit{tangence,} \\ \dfrac{dT}{da_{44}} = 0, & \text{(Tableau du 2}^{\text{e}}\text{ cas, III°, résumé précédent.)} \end{array}\right.$

SOLUTION DE LA QUESTION 460

(voir p. 45);

PAR M. R. VERNIER,
Élève du lycée Napoléon (classe de M. Amyot).

Je prends pour axes de coordonnées les droites AB et AC, j'appelle (α, β), (α', β') les coordonnées des



points X et Y et (x', y) celles du point O. OX et OY ont pour équations

$$y - \beta = \frac{\beta - y'}{\alpha - x'}(x - \alpha),$$

$$y - \beta' = \frac{\beta' - y'}{\alpha' - x'}(x - \alpha').$$

En faisant $x = 0$ dans la première équation et $y = 0$ dans la deuxième, on trouve, tout calcul fait,

$$\text{AM} = \frac{\alpha y' - \beta x'}{\alpha - x'},$$

$$\text{AN} = \frac{\beta'(\beta x' - \alpha y')}{\beta - y'},$$

en ayant égard à la relation

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'},$$

puisque les points A, X et Y sont en ligne droite.

L'équation de MN est donc

$$y\cdot\frac{\alpha-x'}{\alpha y'-\beta x'}+x\cdot\frac{\beta(\beta-y')}{\beta'(\beta x-\alpha y')}=1$$

ou

$$(1)\quad y\beta'(\alpha-n')+n\beta(\beta-y')-\beta'(\alpha y'-\beta x')=0.$$

Or le point O étant sur la droite BC, on a la relation

$$\frac{x'}{b}+\frac{y'}{c}=1,$$

d'où on tire

$$y'=\frac{bc-cx'}{b}.$$

En portant cette valeur de y' dans l'équation (1), on a une équation du premier degré en x' de la forme

$$x'(my+nx+p)+m'y+n'x+p'=0.$$

La droite MN passe donc, quel que soit le point O, par l'intersection des deux droites fixes $my+nx+p=0$ et $m'y+n'x+p'=0$.

En supposant que le point O vienne successivement en B et en C, on voit que ce point fixe est à la rencontre des deux droites BY et CX.

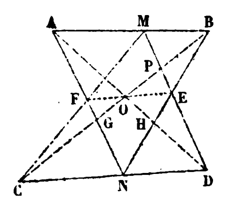
Note du Rédacteur. X et Y étant quelconques, les droites OX et OY sont deux faisceaux homographiques; par conséquent les points M et N forment deux suites de points homographiques : l'enveloppe de la droite MN est donc une conique qui devient un point lorsque X, Y et A sont en ligne droite; le point A devient double.

M. le capitaine Lafonge prend pour axes les droites qui vont des sommets A et C aux points fixes, et démontre, par le procédé ordinaire, que la droite variable passe à l'intersection de ces deux axes.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 460 ;

PAR M. CHARLES FORT,
Elève du lycée de Toulouse (classe de M. Haillecourt).

THÉORÈME. *Étant donnés quatre points fixes* A, B, C, D, *si on prend deux points quelconques* M *et* N *sur les lignes* AB, CD, *qu'on tire les droites* NA, NB, MD, NC, *qu'on joigne* EF, *cette droite pivote autour d'un point fixe.*



Je tire les deux diagonales AD, BC, je joins le point E à leur point de rencontre, et je prolonge EO jusqu'à sa rencontre en F avec AN. Je vais prouver que M, F, C sont en ligne droite.

Les triangles	et les transversales	donnent
BCN	MD	PB.CD.NE = PC.ND.BE,
BCN	AD	CO ND.BH = BO.NH.CD,
DOP	AB	PM OB.DA = DM.AO.PB,
DEH	AB	DM.AH.EB = EM.BH.DA,
EOH	AN	EF.AO.NH = OF.AH.EN.

Multipliant membre à membre ces cinq égalités et supprimant les facteurs communs, il vient

$$PM.EF.OC = EM.OF.PC,$$

les points C, F, M, situés sur les côtés du triangle POE, sont donc en ligne droite, ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire. Si le triangle MCD est donné et que le point N parcoure sa base CD en entraînant dans son mouvement les droites NA, NB, la droite EF passe autour du point O, ce qui démontre le théorème de la question **160**.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SEGMENTAIRES, COURBES PLANES ET SURFACES.

1. Soit

$$N = o$$

l'équation d'une ligne plane de degré n; par un point A situé dans le plan de la courbe menons deux transversales.

Soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots, \quad \alpha_n$$

les angles formant les n asymptotes (réels ou imaginaires) de la courbe avec la première transversale, et

$$\beta_1, \quad \beta_2, \ldots, \quad \beta_n$$

les angles que forment ces asymptotes avec la seconde transversale

$$p_2, \quad p_2, \ldots, \quad p;$$

les n distances au point A des points d'intersection de la première transversale avec la courbe,

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_n$$

les n distances au point A des points d'intersection de la

deuxième transversale, on a

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \ldots \sin \alpha_n}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \ldots \sin \beta_n} = \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{q_1 q_2 \ldots q_n}.$$

Démonstration. Prenons les deux transversales pour axes des x et des y; les deux membres de l'équation sont exprimés chacun par le même quotient $\frac{C}{A}$, A étant le coefficient de la plus haute puissance de y et C le coefficient de la plus haute puissance de x.

Corollaire. Si dans deux courbes planes de degrés quelconques, rapportées aux mêmes axes, le quotient $\frac{C}{A}$ est le même, le membre à droite de l'équation est le même dans les deux, ce qui donne une relation segmentaire.

Observation. Tant que les transversales ne changent pas de direction l'équation subsiste; c'est le théorème segmentaire de Newton que Carnot a étendu à des transversales formant un polygone.

2. En faisant

$$y = 0$$

dans l'équation

$$N = 0,$$

on a évidemment

$$fx = C(x - p_1)(x - p_1)(x - p_2) \ldots (x - p_n),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les points racines de Gauss.

Si l'on prend sur l'axe des x, à partir de l'origine, un point B tel que $AB = r$, on a

$$f(r) = C(r - p_1)(r - p_2) \ldots (r - p_n),$$

$r - p_1$, $r - p_2, \ldots$, sont les distances points-racines au point B.

3. Soient données un nombre *quelconque* de courbes algébriques de degré *quelconque* situées dans le même plan. Pour fixer les idées, nous ne prendrons que quatre courbes données par les équations en x, y :

$$P = 0,$$
$$Q = 0,$$
$$R = 0,$$
$$S = 0,$$

de degrés respectifs n_1, n_2, n_3, n_4, où n_4 est le nombre le plus grand; formons cette cinquième courbe qui sera aussi de degré n_4 :

$$\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R + \lambda_4 S = 0;$$

les λ sont des constantes arbitraires. Désignons par p, q, r, s ce que deviennent P, Q, R, S en posant $y = 0$, alors la même supposition donne

$$\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r + \lambda_4 s = 0 \quad (1),$$

p, q, r, s sont des fonctions de x seulement.

Désignons par p_t, q_t, r_t, s_t ce que deviennent p, q, r, s en prenant $x = t$; soient α, β, γ, δ quatre *points-racines* de l'équation (1), on a

$$\lambda_1 p_\alpha + \lambda_2 q_\alpha + \lambda_3 r_\alpha + \lambda_4 s_\alpha = 0,$$
$$\lambda_1 p_\beta + \lambda_2 q_\beta + \lambda_3 r_\beta + \lambda_4 s_\beta = 0,$$
$$\lambda_1 p_\gamma + \lambda_2 q_\gamma + \lambda_3 r_\gamma + \lambda_4 s_\gamma = 0,$$
$$\lambda_1 p_\delta + \lambda_2 q_\delta + \lambda_3 r_\delta + \lambda_4 s_\delta = 0.$$

Éliminant les λ on a la relation

$$\text{Déterminant}\left\{\begin{matrix} p_\alpha, & q_\alpha, & r_\alpha, & s_\alpha \\ p_\beta, & q_\beta, & r_\beta, & s_\beta \\ p_\gamma, & q_\gamma, & r_\gamma, & s_\gamma \\ p_\delta, & q_\delta, & r_\delta, & s_\delta \end{matrix}\right\} = 0.$$

Or tous ces termes sont des *produits segmentaires* dans les courbes P, Q, R, S (*voir* p. 112).

On a donc ici une relation segmentaire *générale* indépendante des λ et s'appliquant à toutes les cinquièmes courbes formées par *voie d'addition*.

Les quatre valeurs α, β, γ, δ sont susceptibles de six combinaisons binaires; on a ainsi *six* de ces *relations segmentaires*, lesquelles ayant quelques segments communs, fournissent d'autres relations où le nombre des segments est diminué.

Les n_4 donnent $\frac{n_4(n_4-1)(n_4-2)(n_4-3)}{1.2.3\,4}$ combinaisons; on a donc généralement parlant $\frac{n_4(n_4-1)(n_4-2)(n_4-3)}{4}$ relations segmentaires.

Remarque. Quatre quelconque de ces cinq équations des courbes étant données, la cinquième s'en déduit par *voie d'addition*. Soit

$$\lambda P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R + \lambda_4 S = T = 0,$$

on déduit

$$P = \frac{T}{\lambda} - \frac{\lambda_2}{\lambda} Q - \frac{\lambda_3}{\lambda} R - \frac{\lambda_4}{\lambda} S.$$

4. En prenant seulement deux courbes $P=0$, $Q=0$, ces courbes et la troisième qui en dérive passent par les mêmes $n_1 n_2$ points.

Si

$$n_1 = n_2 = 2,$$

on a trois coniques, et la relation segmentaire est connue sous le nom d'*involution*. Desargues l'a énoncée le premier pour les trois couples de droites du quadrilatère complet; Sturm l'a étendue aux coniques.

5. Prenant un point fixe dans le plan des cinq courbes,

les équations des polaires de quantième quelconque, relativement à ces cinq courbes, ont la même dépendance que les équations des courbes, c'est-à-dire que l'une quelconque peut être formée par voie d'addition au moyen des quatre autres; donc le théorème segmentaire s'applique à ces polaires.

6. $\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} = 0$ est la courbe de degré $n_1 - 1$ renfermant les $(n_1 - 1)^2$ pôles de la droite située à l'infini. On voit que les cinq courbes qu'on forme ainsi jouissent encore de la propriété segmentaire.

7. Soient

$$P = A y^{n_1} + \ldots + F_1,$$
$$Q = A y^{n_2} + \ldots + F_2,$$
$$R = A y^{n_3} + \ldots + F_3,$$
$$S = A y^{n_4} + \ldots + F_4,$$

désignant par T la cinquième courbe variable, on a

$$T = A y^{n_4} + \ldots + F_5,$$

d'où (p. 113)

$$F_5 = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F + \lambda_4 F_4.$$

Si

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4,$$

alors

$$F_5 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) F_1.$$

Si l'on prend

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1;$$

on a aussi

$$F_5 = F_1.$$

Alors le produit des distances à l'origine des points-racines situés sur l'axe des y est le même dans toutes ces courbes. Lorsqu'il n'y a que deux courbes P et Q, on peut

toujours choisir sur l'axe des y une origine telle que F_2 devient égale à F_1. Lorsque les deux courbes sont des coniques, cette origine porte le nom de *centre d'involution*.

8. P, Q, R, S pouvant représenter des surfaces, on vient à des conclusions analogues.

Note. Nous ne possédons qu'une géométrie *étriquée;* quand aurons-nous une géométrie finitésimale, infinitésimale, embrassant toute l'étendue? C'est la tâche et même le besoin de l'avenir : car la besogne s'allonge et nullement la vie; les divers genres d'ambitions, forces motrices intérieures et extérieures de la société actuelle, laissent peu de place à la vie méditative et même aux soins de la vie physique. La limite assignée par M. Flourens restera encore longtemps parmi les *pia desideria.* Cependant cette limite a probablement existé dans les temps primitifs; elle est assignée de Dieu, cent vingt ans (Genèse, V, 3).

QUESTIONS.

462. Dans un tétraèdre, le produit des *sinus* des deux angles dièdres *opposés* est proportionnel au produit des *arêtes* de ces mêmes angles (MENTION).

463. Soit l'équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 n^{u-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Si

$$(n-1) a_1^2 - (n+2) a_2 < 0,$$

l'équation a *au moins* un couple de racines imaginaires. (TOEPLITZ.)

464. Démontrer que l'équation de la sphère circonscrite à un tétraèdre est

$$\sum \frac{\alpha\beta \sin(\gamma, \delta) \sin(\alpha\gamma, \beta\gamma) \sin(\alpha\delta, \beta\delta)}{\sin(\alpha, \beta)} = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les premiers membres des équations des faces mises sous la forme

$$x \cos a + y \cos a' + z \cos a'' - p = 0,$$

(γ, δ) représente l'angle que fait la face γ avec la face δ, $(\alpha\gamma, \beta\gamma)$ angle que fait l'intersection des faces α et γ avec l'intersection des faces β et γ. (PROUHET.)

465.

$$\begin{vmatrix} \alpha . \alpha+\delta \ldots & \alpha+(n-2)\delta . & \alpha+(n-1)\delta \\ \alpha+\delta . \alpha+2\delta \ldots & \alpha+(n-1)\delta & \alpha \\ \alpha+2\delta . \alpha+3\delta \ldots & \alpha & \alpha+\delta \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha+n-1\delta \quad \alpha \ldots & \alpha+(n-3)\delta . & \alpha+(n-2)\delta \end{vmatrix} = \pm \frac{(n\delta^{u-1})[2\alpha+(n-1)\delta]}{2}$$

Si l'on fait

$$\alpha = \delta = 1,$$

on retombe sur la question 432 (t. XVII, p. 185).

(MICHAEL ROBERTS.)

466. Par un point *fixe* A pris sur l'intersection de deux plans *fixes*, on mène dans un de ces plans une droite *variable*, et dans le second plan, par le même point A, une droite perpendiculaire à la première droite; puis toujours, par le point A, une troisième droite perpendiculaire aux deux premières; démontrer que l'enveloppe du plan des deux premières droites est un cône du second degré; et de même la surface écrite par la troisième droite. (MAC-CULLAGH.)

Application à la sphère de centre A. (CAYLEY.)

467. Lorsque dans un tétraèdre deux hauteurs se rencontrent, les deux autres hauteurs se rencontrent aussi.

468. Faire voir que p étant un nombre entier positif quelconque, on a

$$0 = 1^p - \frac{m^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p - 1^p)}{1^p.2^p} - \frac{m^p(m^p-1^p)(m^p-2^p)}{1^p.2^p.3^p} + \ldots$$

(BOURGET, prof. de Faculté à Clermont.)

469. Soit le triangle ABC et D un point sur BC, on a $\overline{AA}^2.CD + \overline{AC}^2.BD - \overline{AD}^2.BC = BC.CD.DB$.

SOLUTION DE LA DEUXIÈME QUESTION DE M. STREBOR

(voir t. IX, p. 182);

PAR M. GENOCCHI.

THÉORÈME. *Si la fonction*

$$y = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

étant développée suivant les puissances de x, *donne la série*

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \ldots,$$

le développement de x, *suivant les puissances de* y, *sera*

$$x = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 y^5 - a_7 y^7 \ldots$$

Car, on a

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)};$$

il s'ensuit que la fonction

$$y = \log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

changera de signe avec x, et que par conséquent son développement ne doit renfermer que des puissances impaires de cette variable. En faisant

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = t,$$

et substituant les expressions imaginaires connues, on trouve

$$e^y = \operatorname{tang} t = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{2t\sqrt{-1}} - 1}{e^{2t\sqrt{-1}} + 1};$$

mais

$$e^{2t\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} e^{x\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}},$$

donc

$$\sqrt{-1}\, e^y = \frac{\sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}} - 1}{\sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}} + 1},$$

donc

$$\sqrt{-1}\, e^{x\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}\, e^y - 1}{\sqrt{-1}\, e^y + 1}.$$

On voit, par la comparaison de ces deux équations, que si l'on change x en $y\sqrt{-1}$, on doit aussi changer y en $x\sqrt{-1}$: en supposant donc

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 y^5 + \ldots,$$

et remplaçant x par $y\sqrt{-1}$, y par $x\sqrt{-1}$, on en conclura

$$x = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 x^5 - \ldots.$$

Les coefficients a_1, a_3, a_5, . . . , rentrent dans ceux que présente le développement de la sécante, et qui ont été étudiés par Euler dans son *Calcul différentiel,* 2e partie, §§ 224-226. Ils ont beaucoup d'analogie avec les nombres de Bernoulli. On les exprime de la manière suivante par des séries et par des intégrales définies :

$$a_n = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left[1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \ldots\right]$$
$$= \frac{2^{n+1}}{1.2\ldots n}\int_0^\infty \frac{z^{n-1}\,dz}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}.$$

ÉQUATIONS RÉSULTANT DE DIVERSES ÉLIMINATIONS;

D'APRÈS BEZOUT.

---

1. Pour opérer l'élimination, Bezout a le premier indiqué la méthode des *polynômes multiplicateurs,* méthode la plus générale, la plus complète, la plus philosophique, la seule qui soit entièrement satisfaisante. Toutefois on n'en parle nulle part. C'est qu'on ne lit pas l'ouvrage où cette méthode est consignée. Auteur d'ouvrages élémentaires, modèles jamais égalés en clarté et en élégance, Bezout a négligé ces deux qualités dans son ouvrage fondamental, dans sa *Théorie générale des équations* (1779), chef d'œuvre d'analyse, dont Jacobi faisait un très-grand cas, et qui renferme toutes les prétendues nouveautés en fait d'élimination, entre autres le théorème (p. 342, n° 402), et en partie aussi pour les déterminants (p. 388 et suivantes). Par des questions préparatoires, nous essayerons, *volente Deo*, de faire connaître cette méthode. En attendant, nous donnons ici quelques résultats qui seront souvent consultés.

2. *Notation*. Les lettres a, b, c,..., désignent des fonctions quelconques, d'un nombre *quelconque* de variables $(a\,b') = (ab' - a'\,b)$; $(ab'\,c'')$ désignent des déterminants.

R désigne l'équation résultant de l'élimination.

Premier exemple.

$$a\,x + b = 0,$$
$$a'\,x + b' = 0,$$
$$(\mathrm{R}) \quad (a\,b') = 0.$$

Deuxième exemple (p. 300) (*).

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$
$$(\mathrm{R}) \quad (ab')(bc') - (ac')^2 = 0.$$

Troisième exemple (p. 300).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
$$a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$
$$(\mathrm{R}) \quad \left.\begin{array}{l} [(ab')(bc') - (ac')^2 + (ad')(ab')](cd') \\ -[(ab')(bd') - (ac')(ad')](bd') \\ +[(ab')(cd')' - (ad')^2](ad') \end{array}\right\} = 0.$$

Quatrième exemple (p. 319).

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$d'x + e'y + f' = 0,$$
$$d''x + e''y + f'' = 0,$$
$$(\mathrm{R}) \quad c(d'f'')^2 + (d'e'')(de'f'') - b(c'f'')(d'f'') + a(c'f'')^2 = 0.$$

Si

$$(d'\,e'') = 0,$$

(*) Ces pages sont celles de l'ouvrage de Bezout.

alors on a

$$(\mathrm{R})\quad (c'f'')=0.$$

Cinquième exemple (p. 325).

$$axy+bx+cy+d=0,$$
$$a'xy+b'x+c'y+d'=0,$$
$$a''xy+b''x+c''y+d''=0.$$
$$(\mathrm{R})\quad (ab'c'')(bc'd'')-(ac'd'')(ab'd'')=0.$$

Sixième exemple (p. 326).

$$ax^2+bxy+cx+dy+e=0,$$
$$a'x^2+b'xy+c'x+d'y+e'=0,$$
$$a''x^2+b''xy+c''x+d''y+e''=0.$$
$$\begin{aligned}(\mathrm{R})\quad &[(abc'')(bc'd'')-(ab'd'')(ac'd'')+(ab'c'')(ab'd'')](cd'e'')\\ &+[(ab'c'')(bd'e'')-(ab'd')(ad'e'')](ad'e'')\\ &+[(ab'c'')(bc'e'')-(ab'c'')(ac'e'')-(ab'c'')^2](bd'e'')=0.\end{aligned}$$

DE QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

I.

Résoudre en nombres entiers l'équation $x^2-ny^2=1$, *dans laquelle on suppose que* n *représente un nombre entier, positif, non carré.*

I. Cette question, proposée par Fermat « comme un défi à tous les géomètres anglais, » n'a été, en définitive, résolue d'une manière complète et rigoureuse que par Lagrange; il en a donné deux solutions; la seconde (*),

---

(*) *Algèbre* d'Euler, t. II, *Additions*, et *Théorie des nombres* de Legendre.

fondée sur les propriétés des fractions continues périodiques, se déduit simplement d'une proposition établie dans les *Nouvelles Annales*.

Il a été démontré (t. I, p. 19 et 20) que

La racine carrée d'un nombre rationnel, qui n'est pas un carré, est exprimée par une fraction continue périodique, dont la période est précédée d'un seul quotient incomplet; et qu'en outre, *le dernier quotient incomplet de la partie périodique est double du quotient incomplet qui précède la période.*

On peut donc écrire

$$\sqrt{n} = \alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{\vdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{2\alpha + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}}}},$$

ou, parce que $2\alpha + \dfrac{1}{a + \text{etc.}} = \alpha + \sqrt{n}$,

$$(1) \qquad \sqrt{n} = \alpha + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{\vdots}{\vdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{\alpha + \sqrt{n}}}}}}}.$$

Désignons par $\dfrac{Q}{Q'}$ l'une des réduites correspondantes à l'avant-dernier quotient incomplet q de la période, et par $\dfrac{P}{P'}$ la réduite précédente qui se termine au quotient

incomplet p; l'équation (1) donnera, comme on sait,

$$\sqrt{n} = \frac{Q(\alpha + \sqrt{n}) + P}{Q'(\alpha + \sqrt{n}) + P'},$$

d'où

$$(Q'\alpha + P' - Q)\sqrt{n} = Q\alpha + P - Q'n.$$

Mais, $\sqrt{n}$ étant supposé incommensurable, cette dernière équation exige qu'on ait :

$$Q'\alpha + P' - Q = 0, \quad \text{et} \quad Q\alpha + P - Q'n = 0.$$

De là

$$\alpha = \frac{Q - P'}{Q'}, \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{Q'n - P}{Q}.$$

Donc,

$$\frac{Q - P'}{Q'} = \frac{Q'n - P}{Q};$$

et, par suite,

$$(2) \qquad Q^2 - nQ'^2 = QP' - PQ'.$$

Lorsque $\frac{Q}{Q'}$ est une réduite de rang pair,

$$QP' - PQ' = +1,$$

et si $\frac{Q}{Q'}$ est une réduite de rang impair,

$$QP' - PQ' = -1;$$

dans le premier cas les nombres entiers Q et Q' satisfont à l'équation

$$x^2 - ny^2 = 1,$$

dans le second ils donnent une solution entière de l'équation

$$ny^2 - x^2 = 1.$$

Or, en nommant k le nombre des quotients incomplets

$a, b, \ldots, p, q, 2\alpha$, de la période; et h le rang d'une période, la réduite correspondante à l'avant-dernier quotient incomplet de cette période sera évidemment kh : il s'ensuit que, si k est pair, les deux termes d'une réduite correspondante à l'avant-dernier quotient d'une période de rang quelconque, donneront une solution entière de l'équation $x^2 - ny^2 = 1$. Et que, si k est impair, on aura une solution entière de l'équation, en prenant les deux termes d'une réduite correspondante à l'avant-dernier quotient incomplet de toute période de rang pair.

Par conséquent, l'équation $x^2 - ny^2 = 1$ admet, toujours, une infinité de solutions entières. Il reste à faire voir que la règle précédente donne toutes les solutions entières de cette équation. G.

La fin prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 457

(voir tome XVII, page 434);

Par M. J. DE VIRIEU.

La formule proposée est un cas particulier de la seconde des formules suivantes :

$$\frac{+3\delta - 4R}{12}\cdot\pi = \left\{\begin{array}{l} + \dfrac{6\delta - 13R}{9} + R\left(\dfrac{1}{3}\right) + (R+\delta)\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}\right) \\ + (R+2\delta)\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{7}\right) + \ldots \\ + (R+n\delta)\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}\cdots\dfrac{2n-2}{2n+1}\,\dfrac{2n-2}{2n+3}\,\dfrac{2n}{2n-3}\right) \\ + \ldots \text{ à l'infini,} \end{array}\right.$$

et

$$(4R+\delta)\cdot\frac{1}{\pi}=\left\{\begin{array}{l} R+(R+\delta)\left(\frac{1}{2}\right)^2+(R+2\delta)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 \\ +(R+3\delta)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)^2+\cdots \\ +[R+(n+1)\delta]\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2 \\ +\ldots \text{ à l'infini,} \end{array}\right\}$$

où R et δ représentent des constantes quelconques, n une variable positive croissant indéfiniment à partir de zéro, et dont les accroissements successifs sont égaux à 1.

Ces formules se déduisent de l'expression due à Wallis,

$$\frac{\pi}{2}=\lim\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots \text{ à l'infini.}$$

En effet, posons

$$u_n=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+3}\right),$$

$$v_n=\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\right),$$

$$t_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\right),$$

$$z_n=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+2}\right).$$

En vertu de l'expression de Wallis, on a

$$u_n<\frac{\pi}{2}<v_n,\qquad t_n<\frac{2}{\pi}<z_n;$$

et pour

$$n=+\infty,\ \lim u_n=\frac{\pi}{2}=\lim v_n,\quad \lim t_n=\frac{2}{\pi}=\lim z_n,$$

on a

$$\Delta u_n = +\frac{1}{(2n+3)(2n+5)} u_n = \frac{1}{2n+5}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n+2}{2n+3}\right)^2,$$

$$\Delta v_n = -\frac{1}{(2n+3)^2}\cdot v_n = -\frac{1}{2n+2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n+2}{2n+3}\right)^2,$$

$$\Delta t_n = +\frac{1}{(2n+2)(2n+4)}\cdot t_n = +(2n+4)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n+4}\right)^2,$$

$$\Delta z_n = -\frac{1}{(2n+4)^2} z_n = -(2n+3)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n+4}\right)^2.$$

Mais on a

$$y_n = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{n-1}.$$

Remplaçant y successivement par u, v, t, z, on a

$$u_n = \frac{4}{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)^2 + \ldots$$
$$+\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\right)^2,$$

$$v_n = 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)^2 + \ldots$$
$$-\frac{1}{2n}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\right)^2,$$

$$t_n = \frac{1}{2} + 4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)^2 + \ldots$$
$$+(2n+2)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2,$$

$$z_n = \frac{3}{4} - 3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right) - \ldots$$
$$-(2n+1)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2.$$

a, b, f, g étant des constantes, l'on a

$$au_n + bv_n = \left\{\begin{array}{l} +\left(\frac{4}{3}a + 3b\right) - 3b\left(\frac{1}{3}\right) \\ +(2a - 5b)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\right) \\ +(4a - 7b)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\right) + \ldots \\ +[2na - (2n+3)b] \\ \times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n+1}\,\frac{2n}{2n+3}\right) \end{array}\right\},$$

$$ft_n + gz_n = \left\{\begin{array}{l} +g + (2f - g)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ +(4f - 3g)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 \\ +(6f - 5g)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)^2 + \ldots \\ +[(2n+2)f - (2n+1)g] \\ \times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2 \end{array}\right\}.$$

Posons dans la première équation $a = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{3}R$, $b = -\frac{1}{3}R$, et dans la deuxième, $g = R$, $f = R + \frac{1}{2}\delta$, on obtient

$$\frac{(3\delta - 2R)u_n - 2Rv_n}{6} = \left\{\begin{array}{l} +\frac{6\delta - 13R}{9} + R\left(\frac{1}{3}\right) \\ +(R + \delta)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\right) \\ +(R + 2\delta)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\right) + \ldots \\ +(R + n\delta) \\ \times\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n+1}\,\frac{2n}{2n+3}\right) \end{array}\right\},$$

et

$$\frac{(3R+\delta)t_n + 2Rz_n}{2} = \left\{ \begin{array}{l} +R + (R+\delta)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ + (R+2\delta)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)^2 \\ + (R+3\delta)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\right)^2 + \ldots \\ + [R+(n+1)\delta] \\ \times \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n+2}\right) \end{array} \right\}.$$

En passant aux limites (p. 126), on a les formules annoncées au commencement de cet article. Faisant

$$\delta = 0, \quad R = 1,$$

on a la solution de la question 457.

Note. M. Hatterer (J.), maître répétiteur au lycée de Clermont-Ferrand, donne une solution déduite aussi de l'expression Wallis.

SOLUTION DE LA QUESTION 376

(voir t. XVI, p. 179);

PAR M. DE JONQUIÈRES.

Il s'agit de démontrer que *sur une surface du troisième degré il existe, en général, vingt-sept droites.*

Cette question a été traitée, il y a quelques années, par MM. A. Cayley et G. Salmon. Je ne fais guère qu'analyser diverses publications de ces deux savants géomètres.

LEMME I. *Le cône circonscrit à une surface du de-*

gré m est du degré $m(m-1)$; *il a* $m(m-1)(m-2)$ *arêtes de rebroussement, et* $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$ *autres arêtes doubles.*

Pour le démontrer, soit $U=0$ l'équation de la surface exprimée en coordonnées *quadrilittères* x, y, z, t. Soient aussi (x, y, z, t), (x', y', z', t') les coordonnées de deux points a et a'; celles du point qui divise la droite aa' dans le rapport de λ à μ, seront

$$\lambda x+\mu x', \quad \lambda y+\mu y', \quad \lambda z+\mu z', \quad \lambda t+\mu t'.$$

Substituons ces expressions aux coordonnées courantes, dans l'équation de la surface, l'équation résultante sera du $m^{ième}$ degré en $\frac{\mu}{\lambda}$, et ses m racines seront les valeurs des coordonnées des points où la surface est rencontrée par la droite aa'.

Le résultat de cette substitution sera, en vertu du théorème de Taylor appliqué aux fonctions de quatre variables,

$$[U]=\lambda^m U+\lambda^{m-1}\mu\ \Delta U+\frac{\lambda^{m-2}.\mu^2}{1.2}\Delta^2 U+\ldots=0,$$

où l'on représente, pour abréger, par le symbole Δ l'opération

$$x'\frac{d}{dx}+y'\frac{d}{dy}+z'\frac{d}{dz}+t'\frac{d}{dt}\,(*).$$

Actuellement soit $\varphi(U)=0$ l'équation qui exprime la condition nécessaire pour que l'équation $[U]$ en $\frac{\lambda}{\mu}$ ait deux racines égales. Si, dans cette équation, on regarde x, y, z, t comme variables, elle représentera le lieu géométrique de tous les points tels, que la droite qui joint

(*) Sous-entendez dU.

chacun d'eux au point a' touche la surface donnée ; en d'autres termes, cette équation de condition

$$\varphi(\mathrm{U}) = 0$$

sera l'équation du cône circonscrit qui a son sommet au point $a'(x', y', z', t')$.

Or on sait, par l'algèbre, que la condition dont il s'agit, relativement à une équation homogène à deux variables λ et μ, n'est autre chose que le résultat de l'élimination entre les deux équations dérivées $\frac{d[\mathrm{U}]}{d\lambda}$ et $\frac{d[\mathrm{U}]}{d\mu}$. On voit donc que cette équation résultante est du degré $m(m-1)$ en x, y, z, t ; or c'est l'équation du cône circonscrit. Donc la première partie du lemme est démontrée.

Les arêtes de rebroussement du cône circonscrit sont celles qui rencontrent la surface en trois points consécutifs et infiniment voisins (*). Soient (x, y, z, t) les coordonnées du point de contact d'une telle arête, l'équation $[\mathrm{U}] = 0$ doit, dans ce cas, être divisible par μ^3. Donc le point de contact en question est l'un des points d'intersection des trois surfaces $\mathrm{U} = 0$, $\Delta\mathrm{U} = 0$, $\Delta^2\mathrm{U} = 0$, qui sont, respectivement, des degrés m, $m-1$, $m-2$. Le nombre de ces points singuliers est donc, en général,

$$m(m-1)(m-2),$$

et tel est par conséquent aussi le nombre des arêtes de rebroussement du cône, comme il s'agissait de le démontrer.

(*) Le plan tangent en un point quelconque d'une surface coupe cette surface suivant une courbe qui a un point double au point de contact du plan. En chaque point double d'une courbe, il existe deux tangentes ; donc, en chaque point d'une surface, on peut lui mener deux tangentes qui aient avec elle trois points communs infiniment voisins. On conçoit qu'il existe sur la surface certains points tels, que l'une de ces deux tangentes singulières passe par le sommet du cône circonscrit. Cette tangente est alors une arête de rebroussement du cône.

Enfin les arêtes doubles ordinaires du cône circonscrit sont celles qui touchent la surface en deux points distincts. L'équation $[U] = 0$ a, dans ce cas, deux valeurs de μ nulles et deux autres égales entre elles. Donc les coordonnées de l'un quelconque des points de contact de ces tangentes doubles doivent satisfaire aux équations

$$U = 0, \quad \Delta U = 0 \quad \text{et} \quad \psi(U) = 0,$$

$\psi(U) = 0$ étant l'équation qui exprime la condition nécessaire pour que l'équation

$$\frac{1}{1.2}\lambda^{m-2}\Delta^2 U + \frac{1}{1.2.3}\lambda^{m-3}\mu\Delta^3 U + \ldots = 0$$

ait des racines égales. $\psi(U)$ est évidemment du degré $(m-2)(m-3)$ en x, y, z, t. Donc le nombre des points de contact des tangentes doubles est, en général,

$$m(m-1)(m-2)(m-3),$$

et, par conséquent, celui des tangentes doubles, qui est aussi celui des arêtes doubles du cône circonscrit, est égal à $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$; ce qui complète la démonstration du lemme.

Lemme II. *Le nombre* T *des plans doubles tangents au cône circonscrit à une surface du degré m, est donné par la formule*

$$T = \frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - (2D + 3D')(m^2 - m - 6)$$

$$+ 2D(D-1) + 6DD' + \frac{9}{2}D'(D'-1),$$

dans laquelle D *et* D' *représentent, respectivement, les*

nombres de ses arêtes doubles et de ses arêtes de rebroussement.

Pour le démontrer, je rappelle les formules suivantes, qui sont élémentaires, dans la théorie générale des lignes courbes :

m étant le degré d'une courbe algébrique plane;
n sa classe;
D le nombre de ses points doubles;
D′ celui de ses points de rebroussement;
T celui de ses tangentes doubles;
T′ celui de ses tangentes d'inflexion ou stationnaires;
On a les trois relations fondamentales

$$m(m-1) = n + 2D + 3D',$$
$$n(n-1) = m + 2T + 3T',$$
$$3m(m-2) = 6D + 8D + T,$$

dont la seconde se déduit de la première par la théorie des polaires réciproques. On en conclut l'équation citée dans le lemme, en les combinant entre elles et en éliminant n et T′.

Or ces formules conviennent évidemment aux surfaces coniques aussi bien qu'aux courbes planes. Donc l'équation du lemme est justifiée.

Corollaire. On en conclut que le cône du sixième degré, qui est circonscrit à une surface du troisième ordre, n'a aucune arête double, qu'il est doué de six arêtes de rebroussement et de vingt-sept plans tangents doubles.

Théorème. *Sur toute surface du troisième degré il existe vingt-sept droites.*

Première démonstration. Chaque plan tangent double du cône circonscrit à la surface est aussi un plan tangent double de la surface, et par conséquent il la coupe suivant

une droite et une conique (*). Réciproquement, tout plan passant par le sommet du cône et par l'une des droites de la surface (s'il en existe), est un plan tangent double du cône.

Donc le nombre des droites qu'on peut mener sur la surface est aussi celui des plans tangents doubles du cône circonscrit. Et, en vertu du lemme II (corollaire), ce nombre est 27.

Seconde démonstration. Une surface du troisième ordre contient, en général, un certain nombre de lignes droites (**). Tout plan mené par une de ces droites coupe la surface suivant la droite et une conique, c'est-à-dire suivant une courbe du troisième ordre douée de deux

(*) En effet, le plan tangent en un point quelconque d'une surface la coupe suivant une courbe qui a le point de contact pour point double; car toute droite menée par ce point dans le plan tangent y rencontre la surface en deux points infiniment voisins. Si le plan tangent est double, il y a deux points de contact, et, par suite, la courbe d'intersection a deux points doubles. Or, dans le cas actuel, cette courbe est du troisième ordre seulement; donc elle ne peut avoir deux points doubles qu'à la condition de se décomposer en une droite et une conique. Les deux points de rencontre de la droite et de la conique sont les deux points doubles de la courbe du troisième ordre que représente le système de ces deux lignes.

(**) Pour qu'une droite coïncide avec la surface, il faut exprimer qu'elle la rencontre en $3+1=4$ points, ce qu'on fera au moyen de quatre équations de condition, qui la détermineront complétement, parce qu'une droite ne comportant dans ses équations que quatre coefficients indépendants, ne peut être assujettie qu'à quatre conditions. Les ordonnées r des points d'intersection de la droite et de la surface seront les racines d'une équation de la forme

$$A r^3 + B r^2 + C r + D = 0,$$

et les quatre équations de condition dont il s'agit seront

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0.$$

Cette démonstration prouve incidemment que la surface du troisième degré est la seule surface *générale* sur laquelle on puisse toujours tracer des lignes droites.

points doubles. Un tel plan est donc un plan tangent double, dont les deux points de contact sont les points d'intersection de la droite et de la conique.

Par une détermination convenable du plan dont il s'agit, la conique elle-même peut se réduire à deux droites, et, dans ce cas, le plan coupe la surface suivant trois lignes droites, c'est-à-dire suivant une ligne du troisième ordre qui a trois points doubles, et par conséquent le plan est alors un *plan tangent triple,* dont les trois points de contact sont les trois sommets du triangle que forment les trois droites.

On démontre (*) que, par chacune des droites de la surface, on peut mener cinq et seulement cinq plans tangents triples. Considérons l'un quelconque M de ces plans. Par chacune des trois droites de la surface qu'il contient, on peut mener quatre autres plans semblables, sans compter celui qui nous occupe. On a ainsi douze nouveaux plans, dont chacun donne lieu à deux nouvelles droites situées sur la surface. On a donc 24 droites qui, ajoutées aux 3 contenues dans le plan M, font un total de 27.

Ce sont les seules qui existent sur la surface. Car, puisque les trois droites contenues dans le plan M forment

---

(*) Ce théorème, dont M. Cayley ne donne pas la démonstration, se prouve aisément comme il suit :

Rapportons la surface à trois axes rectangulaires, en choisissant la droite donnée pour axe des x. Son équation, exprimée en coordonnées ordinaires, devant être satisfaite par les valeurs $y = 0$ et $z = 0$, ne contiendra aucun des termes où x se trouve isolément à diverses puissances, et n'aura pas non plus de terme constant. On aura, par exemple,

$$\begin{aligned}Ay^3 + Bz^3 + Cx^2y + Dx^2z + Ey^2x + Fy^2z + Gz^2x + Hz^2y + Ixyz \\ + Kxy + Lxz + Myz + Oy^2 + Pz^2 + Ry + Sz = 0.\end{aligned}$$

Soit

$$z = \alpha y$$

l'équation d'un plan passant par l'axe des x, et dont la position est fixée par la seule valeur de l'indéterminée α. Ce plan coupera la surface sui-

l'intersection complète de ce plan et de la surface, toute autre droite de cette surface ne peut rencontrer le plan M qu'en un point situé sur l'une des trois droites qu'il contient. Cette droite est donc comprise dans un plan passant par l'une de ces lignes, plan qui est lui-même un de ceux qu'on a déjà considérés, puisque, passant déjà par deux droites de la surface, il ne peut la couper que suivant une troisième droite.

Puisqu'il passe cinq plans tangents triples par chacune des 27 droites, et que d'ailleurs chaque plan triple contient trois droites, il s'ensuit que le nombre des plans tangents triples est 45.

De même que le nombre des tangentes, qu'on peut mener à une courbe plane par un point intérieur, diminue quand cette courbe a des points singuliers, de même le nombre

---

vant une conique dont la projection sur le plan des xy aura pour équation

$$(\mathrm{V})\quad \begin{cases} y^2(\mathrm{B}\alpha^2+\mathrm{H}\alpha^2+\mathrm{F}\alpha+\mathrm{A})+xy(\mathrm{G}\alpha^2+\mathrm{I}\alpha+\mathrm{E})+x^2(\mathrm{D}\alpha+\mathrm{C}) \\ +y[\alpha(\mathrm{M}+\mathrm{P})+\mathrm{O}]+x(\mathrm{L}\alpha+\mathrm{K})+(\mathrm{S}\alpha+\mathrm{R})=0. \end{cases}$$

Désignons, pour abréger, par

a	le coefficient de	y^2,
$2b$	»	xy,
c	»	x^2,
$2d$	»	y,
$2e$	»	x,
f	»	l'équation.

On sait que la condition pour que l'équation (V) se décompose en deux facteurs linéaires est

$$ae^2+cd^2+fb^2-acf-2bde=0$$

(*voir* par exemple *Salmon's Conics*, 3e édit., p. 66). Substituant les valeurs des coefficients de l'équation (V), on obtient une équation du cinquième degré en α. Donc il existe généralement cinq valeurs de α, et pas davantage, qui satisfont à la question ; en d'autre termes, il existe cinq plans passant par la droite donnée sur la surface qui coupe cette surface suivant un système de deux autres droites. Ce qu'il fallait démontrer.

des droites de la surface du troisième ordre diminue ainsi que celui de ses plans tangents triples, quand la surface est douée de points doubles, parce qu'une droite de la surface qui passe par un de ces points doit être comptée pour deux, et pour quatre si elle joint deux de ces points. Pour ces considérations et d'autres du même genre, je dois me borner à renvoyer le lecteur à un article de M. G. Salmon, inséré dans le IVe vol. du *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*.

On sait que, si l'on mène quatre plans quelconques par une génératrice rectiligne d'une surface réglée du second ordre, leur rapport anharmonique est égal à celui des quatre points où ils sont tangents à la surface (*). Les lignes droites de la surface du troisième ordre donnent lieu à un théorème analogue qui est ainsi conçu :

Si l'on mène quatre plans quelconques par une droite située sur une surface du troisième ordre, les quatre segments, que déterminent sur cette droite leurs deux points de tangence respectifs, sont en involution, et ils correspondent anharmoniquement aux quatre plans.

La démonstration de ce théorème est une conséquence du *principe de correspondance anharmonique* de M. Chasles. Car à un plan il correspond à la fois deux points de tangence sur la droite, et réciproquement, à chacun de ces points, indistinctement, il ne correspond qu'un seul plan tangent (à moins que ce point ne soit un point singulier de la surface, ce qui n'a pas lieu en général). Or les points sont en ligne droite, et les plans passent par un même point. Donc, etc.

Chacun des deux points doubles de l'involution dont il s'agit est tel, que le plan tangent à la surface en ce point est le même que le plan tangent au point infiniment

---

(*) CHASLES, *Mémoire sur les surfaces réglées du second ordre.*

voisin dans la direction de la droite. C'est par conséquent un *point parabolique* de la surface, selon l'expression adoptée par les géomètres depuis M. Charles Dupin.

Note du Rédacteur. Sur la surface donnée par l'équation

$$z^3 = ax^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f$$

ou

$$b^2 - 4ac < 0,$$

on ne peut tracer qu'une seule droite située à l'infini.

M. Steiner donne la démonstration suivante :

Soient trois angles *trièdres;* leurs plans se coupent suivant neuf droites par lesquelles passent une infinité de surfaces du troisième degré (*voir* p. 49) ; ces neuf droites et un point donné déterminent une de ces surfaces ; or, ces neuf droites forment six groupes de trois droites chacune tels, que dans chaque groupe les droites ne se rencontrent pas ; par chaque groupe passe donc un hyperboloïde à une nappe ; chaque hyperboloïde rencontre encore la surface du troisième ordre (en trois droites) ; il existe donc vingt-sept droites sur cette surface.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE;

D'APRÈS M. F BRIOSCHI.

---

1. Sur une surface du troisième degré (*) existent, en général, 27 droites (**). M Cayley a démontré que ces

---

(*) Extrait des *Annali di Scienze matematiche e fisiche*, da Barnaba Tortolini, t. VI, 1855.

(**) La découverte de ces 27 lignes appartient à M. Hart (*Dublin Journal*).

27 droites forment 45 groupes chacun de trois droites dans un même plan ; autrement une surface du troisième degré a 45 plans tangents qui touchent la surface, chacun suivant trois droites. Il est évident que chacune des droites est dans ciuq des 45 plans ; de sorte que les 45 plans peuvent se partager en 9 faisceaux de 5 plans chacun (p. 136).

M. Hart a donné une notation très-commode pour indiquer les 27 droites et les 45 plans.

Les droites sont représentées par les 27 lettres

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1, & B_1, & C_1; & A_2, & B_2, & C_2; & A_3, & B_3, & C_3; \\ a_1, & b_1, & c_1; & a_2, & b_2, & c_2; & a_3, & b_3, & c_3; \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1; & \gamma_2, & \beta_2, & \alpha_2; & \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3; \end{array}$$

18 plans sont représentés en unissant dans chaque ligne horizontale trois mêmes lettres avec des indices différents ou trois lettres différentes avec les mêmes indices ; ainsi la ligne des A donne les six plans

$$A_1A_2A_3,\quad B_1B_2B_3,\quad C_1C_2C_3,\quad A_1B_1C_1,\quad A_2B_2C_2,\quad A_3B_3C_3.$$

De même la ligne des a et des α.

Les 27 autres plans sont

$$\begin{array}{rrr} A_1a_1\alpha_1, & B_1b_1\beta_1, & C_1c_1\gamma_1, \\ b_2\beta_2, & c_2\gamma_2, & a_2\alpha_2, \\ c_3\gamma_3, & a_3\alpha_3, & b_3\beta_3, \\ A_2c_2\beta_3, & B_2a_2\gamma_3, & C_2b_2\alpha_3, \\ a_3\gamma_1, & b_3\alpha_1, & a_3\beta_1, \\ b_1\alpha_2, & c_1\beta_2, & c_1\gamma_2, \\ A_3b_3\gamma_2, & B_3c_3\alpha_2, & C_3a_3\beta_2, \\ a_1\alpha_3, & a_1\beta_3, & b_1\gamma_3, \\ c_2\beta_1, & b_2\gamma_1, & c_2\alpha_1. \end{array}$$

La droite A_1 est rencontrée par les dix lignes

(M) $$A_2A_3B_1C_1a_1b_2c_3\alpha_1\beta_2\gamma_3;$$

la droite A_1 n'est pas rencontrée par les seize lignes

(N) $B_2 B_3 C_2 C_3 a_2 a_3 b_1 b_3 c_1 c_2 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 \gamma_1 \gamma_2$.

Chaque ligne de la série (N) est rencontrée par 5 de la série M et par 5 de la série N.

Ainsi B_2 est rencontrée par

$A_2 B_1 \alpha_1 \beta_2 \gamma_3$ de la série (M),

et par

$B_3 C_2 a_2 b_3 c_1$ de la série (N).

Les 16 droites de la série (N) combinées deux à deux donnent 120 couples de droites; le cinquième de ces couples sont des droites qui se rencontrent; il y a donc 40 couples où les droites se rencontrent, et 80 couples où il n'y a pas de rencontre; chacun de ces 80 couples n'est pas rencontré non plus par la droite A_1. Il y a donc 80 ternes de droites où il n'y a pas de rencontre.

2. Ce qu'on dit de A_1 s'applique à toute autre droite; il y a donc $\frac{10.27}{2} = 135$ couples de droites qui se coupent; $\frac{16.27}{2} = 216$ couples de droites qui ne se coupent pas, et, par conséquent, $\frac{216.10}{2} = 720$ ternes de droites qui ne se coupent pas.

Nous appelons *terne* trois droites qui ne se coupent pas.

3. *Ternes conjugués.* Soit le terne $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2$ formé de droites qui ne se coupent pas, et de même le terne $a_1 b_3 c_2$; mais chacune de ces dernières droites coupe les trois premières droites : ces deux ternes sont des conjugués et sont, par conséquent, sur une hyperboloïde à une nappe.

Hexagones conjugués. Deux ternes conjugués don-

nent naissance à trois hexagones où les côtés opposés se rencontrent; par exemple les deux ternes précédents donnent les trois hexagones conjugués

$$a_1 \alpha_1 b_3 \beta_3 c_2 \gamma_2,$$
$$a_1 \beta_3 b_3 \gamma_2 c_2 \alpha_1,$$
$$a_1 \gamma_2 b_3 \alpha_1 c_2 \beta_3.$$

4. *Groupes opposés.* Considérant un terne on trouve 6 autres droites dont aucune ne rencontre le terne, et ces 6 droites se partagent en deux ternes.

Exemple. Soit le terne $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2$; aucune de ces droites n'est coupée par les 6 droites $b_1 c_1 a_2 b_2 a_3 c_3$; ces six droites se partagent en deux ternes $a_2 b_1 c_3$, $a_3 b_2 c_1$; ces deux ternes sont dits opposés au terne $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2$.

Les groupes opposés à deux ternes conjugués sont eux-mêmes des ternes conjugués.

Exemple. $\alpha_1 \beta_3 \gamma_2$, $a_1 b_3 c_2$ sont des ternes conjugués; les groupes opposés au premier terne sont

$$a_2 b_1 c_3,$$
$$a_3 b_2 c_1,$$

les groupes opposés au second sont

$$\alpha_2 \beta_1 \gamma_3,$$
$$\alpha_3 \beta_2 \gamma_1,$$

qui constituent des ternes conjugués.

Dans cet exemple les trois hexagones opposés sont

$$a_1 \alpha_1 b_3 \beta_3 c_2 \gamma_2,$$
$$a_2 \alpha_2 b_1 \beta_1 c_3 \gamma_3,$$
$$a_3 \alpha_3 b_2 \beta_2 c_1 \gamma_1.$$

Le célèbre géomètre donne encore d'autres considérations du même genre. M. Schläfli, profond analyste de l'Université de Berne, a traité la même question (*Quar-*

terly Journal; mai 1857, p. 65 et 110) et divise la surface en espèces d'après le nombre de *droites réelles et imaginaires*.

Nous ne comprenons pas encore suffisamment cet important travail pour en faire une exposition; nous en rendrons compte si nous parvenons à le bien comprendre.

SUR LE NOMBRE DES POINTS MULTIPLES D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE;

Rectification d'un précédent article;

PAR M. ABEL TRANSON.

J'ai montré dans ce Journal (mars 1851, t. X, p. 91) que le nombre des points doubles d'une courbe algébrique de degré n ne peut pas surpasser le nombre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Dans un Mémoire publié à Rome dans le mois de mai 1852 (*Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*), Mémoire que M. Terquem vient de me communiquer, l'auteur, M. Fortunato Padula, démontre à sa manière le même théorème qui, d'après ce qu'il nous apprend, avait été primitivement énoncé par M. Steiner, et dont M. Padula avait déjà publié une démonstration en 1844.

J'avais à la même occasion donné trois autres formules, l'une pour la limite supérieure du nombre des points multiples dont le degré de multiplicité est au moins égal à μ, c'est-à-dire où le nombre des branches qui se rencontrent est au moins μ; l'autre pour le nombre des points de degré μ, lorsque les μ branches s'y touchent au lieu de s'y traverser; la troisième pour le nombre des

points où, sur μ branches qui se rencontrent, il y en a μ' qui se touchent.

M. Padula, dans le Mémoire ci-dessus indiqué, conteste l'exactitude de ces trois formules. Je reconnais la validité de sa critique quant aux deux dernières. Je les rectifierai donc tout à l'heure, et on verra que, pour réparer mon inadvertance, je n'aurai pas besoin de recourir à un autre principe que celui sur lequel j'avais fondé mes recherches. Quant à ma première formule, j'ai lieu de croire que M. Padula n'a pas lu bien attentivement cette partie de mon travail.

Voici en effet ce que je disais pour trouver, dans une courbe algébrique de degré n, le nombre des points dont la multiplicité est au moins égale à μ.

« Le nombre des points du degré de multiplicité μ ne saurait atteindre celui des points qui déterminent une courbe de degré $\frac{2n}{\mu} - 2$. (Si cette formule $\frac{2n}{\mu} - 2$ donne un nombre fractionnaire, entendez alors que le nombre des points en question ne peut pas atteindre celui des points qui déterminent la courbe dont le degré surpasse immédiatement $\frac{2n}{\mu} - 2$). Cela résulte de la relation

$$\mu . \frac{\left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{2n}{\mu} + 1\right)}{2} > \left(\frac{2n}{\mu} - 2\right) n,$$

où le premier membre de l'inégalité représente le nombre des rencontres nécessaires que la proposée aurait avec une courbe de degré $\frac{2n}{\mu} - 2$ passant par des points de multiplicité μ en nombre

$$\frac{\left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{2n}{\mu} + 1\right)}{2}.$$

» On est donc assuré de pouvoir placer tous les points en question sur une courbe du degré $\frac{2n}{\mu} - 2$. Chacun de ces points entrera pour une seule unité dans le nombre des points déterminants de la courbe auxiliaire; mais il déterminera μ rencontres; de sorte qu'en appelant y le nombre des points cherchés, on a la relation

$$\frac{\left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)\left(\frac{2n}{\mu} + 1\right)}{2} + (\mu - 1)y \leqq \left(\frac{2n}{\mu} - 2\right)n,$$

d'où on tire pour y la formule suivante

$$y \leqq \frac{(n-\mu)[2n(\mu-1)-\mu]}{(\mu-1)\mu^2} \quad (1). \text{ »}$$

On voudra bien remarquer que j'avais expressément réservé le cas où $\frac{2n}{\mu} - 2$ étant un nombre fractionnaire ne pourrait pas représenter le degré d'une courbe. Mais dans ce cas-là même mon principe ne me faisait pas défaut, et je l'énonçais avec la modification convenable, puisque je disais formellement que le degré de la courbe auxiliaire serait alors le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{2n}{\mu} - 2$. Avec cette indication, le lecteur que cela intéresserait pouvait construire la formule relative au cas réservé (**).

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. X, p. 96. Cette citation peut offrir quelque obscurité au lecteur qui n'aura pas sous les yeux le reste de l'article. Mais cette obscurité se dissipera à l'aide des explications données plus loin pour la rectification des deux dernières formules.

(**) Soit α le nombre entier égal ou bien immédiatement supérieur à $\frac{2n}{\mu} - 2$, selon que cette expression est un nombre entier ou fractionnaire;

Malheureusement ces réserves et ces indications ont été insuffisantes. Après avoir trouvé de son côté une formule qui, lorsque $\frac{2n}{\mu}$ est un nombre entier, coïncide exactement avec la mienne, ainsi qu'il a soin de le déclarer lui-même, M. Padula met ma formule en défaut, précisément lorsque $\frac{2n}{\mu}$ est un nombre fractionnaire. Par ce moyen il me fait trouver qu'une courbe du cinquième degré n'admet jamais un point multiple du quatrième degré de multiplicité, tandis qu'une courbe du septième degré pourrait en admettre deux. Mais c'est un résultat qu'il m'attribue fort gratuitement.

De mon côté, pour être parfaitement juste, je me plais à reconnaître que, quand ma formule ne coïncide pas avec celle de M. Padula, c'est-à-dire lorsque $\frac{2n}{\mu}$ est fractionnaire, la limite que je trouve est moins avantageuse que la sienne.

Et maintenant j'arrive à la rectification de mes deux dernières formules.

Soit y le nombre des points multiples dont le degré de multiplicité est au moins égal à μ, mais où les μ branches de la courbe se touchent au lieu de se traverser.

Soit 2α le nombre égal à $\frac{n}{\mu} - 1$, si cette dernière ex-

---

le nombre y des points cherchés ne saurait atteindre la limite $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$. On peut donc prendre sur la courbe donnée un nombre de points égal à $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$ parmi lesquels se trouveront les points cherchés, et y faire passer une courbe de degré α. Celle-ci aura avec la proposée un nombre de rencontres égal à $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + (\mu - 1)y$; nombre qui ne peut pas dépasser $n\alpha$. D'où il résulte qu'on a $y \leqq \frac{\alpha(2n - \alpha - 3)}{2(\mu - 1)}$, formule qui se ramène à celle du texte lorsqu'on y remplace α par $\frac{2n}{\mu} - 2$.

pression est un nombre pair ; ou bien soit 2α le nombre pair immédiatement supérieur à $\frac{n}{\mu} - 1$ si celui-ci est impair ou fractionnaire.

Je dis que le nombre y des points cherchés est nécessairement moindre que $\alpha\,(4\alpha + 3)$, c'est-à-dire moindre que la moitié du nombre des conditions qui déterminent une courbe du degré 4α. Supposons en effet qu'on puisse avoir $y = \alpha\,(4\alpha + 3)$; alors on pourrait, par tous ces points, faire passer une courbe du degré 4α avec la condition que cette courbe auxiliaire aurait en chacun de ces points même tangente que la proposée ; car ce serait imposer $2\alpha\,(4\alpha + 3)$ conditions. Mais alors le nombre des rencontres serait au moins égal à $2\mu\alpha\,(4\alpha + 3)$, expression que j'écris comme il suit :

$$4\alpha\left[2\mu\alpha + \frac{3}{2}\mu\right],$$

ce qui, à cause de $2\mu\alpha \gtreqless n - \mu$, donnerait un nombre de rencontres au moins égal à $4\alpha\,(n + \frac{1}{2}\mu)$, c'est-à-dire un nombre supérieur au produit des degrés des deux équations.

Maintenant prenons sur la courbe un nombre de points égal à $\alpha(4\alpha + 3)$, parmi lesquels nous aurons choisi tous les points cherchés en nombre y. Construisons une courbe du degré 4α qui passe par ces points et qui y touche la courbe donnée ; le nombre total des rencontres, comparé au produit du degré des équations, donnera

$$2\alpha\,(4\alpha + 3) + 2\,(\mu - 1)\,y \leqq 4\alpha n,$$

d'où on tire la formule

$$y \leqq \frac{2\alpha(n - 4\alpha - 3)}{\mu - 1}.$$

Par des considérations semblables on trouvera, pour le nombre z des points dont la multiplicité est μ et où μ' branches se touchent,

$$z \leqq \frac{2\alpha(2n - 4\alpha - 3)}{\mu + \mu' - 2},$$

formule dans laquelle 2α représente le nombre pair égal ou immédiatement supérieur à $\frac{2n}{\mu + \mu'} - 1$.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 458 (CATALAN)

(voir p. 66);

PAR M. CHABIRAND,
Élève de l'institution Sainte-Barbe.

Si l'on considère une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes, que l'on donne successivement aux abscisses les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, les ordonnées correspondantes seront $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$.

Or, l'aire comprise entre l'ordonnée $\frac{1}{1}$ et l'ordonnée $\frac{1}{n}$ est égale à ln. Cette aire pouvant être regardée comme la limite d'une somme de rectangles, on peut dire qu'il résulte immédiatement de là que si n croît indéfiniment, l'unité pouvant être prise aussi petite qu'on voudra, on a à la limite

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = ln,$$

de même

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} = l2n.$$

Retranchant la première égalité de la deuxième,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=l2n-ln;$$

donc

$$\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=l2.$$

Note. M. Rebstein, de l'École polytechnique de Zurich, ramène la série à une autre série de termes différentiels qu'il intègre successivement.

SOLUTION DE LA QUESTION 459

(voir page 45);

PAR M. B. VERNIER,
Élève du lycée Napoléon.

J'appelle α et β les longueurs des deux perpendiculaires données, δ leur distance, $a, b, c, \ldots, l$ les moyennes géométriques.

On suppose $\alpha > \beta$.

La surface cherchée est

$$S=\frac{\delta}{p}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+a+b+c+\ldots+l\right).$$

Or

$$\frac{\alpha}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\ldots=\frac{l}{p}=\frac{\alpha+a+b+c+\ldots+l}{a+b+c+\ldots+l+\beta}=\sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}},$$

d'où

$$a+b+c+\ldots+l=\frac{\beta\sqrt[p]{\frac{\beta}{\alpha}}-\alpha}{1-\sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

et

$$S = \frac{\delta}{p} \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\delta}{p} \cdot \frac{\beta \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}} - \alpha}{1 - \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}}}.$$

Je pose

$$1 - \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}} = m,$$

d'où

$$\frac{1}{p} = \frac{\log(1 - m)}{\log \frac{\alpha}{\beta}},$$

logarithme dans une base quelconque, et

$$S = \frac{\delta}{p} \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + \delta \frac{\beta \sqrt[p]{\frac{\alpha}{\beta}} - \alpha}{\log \frac{\alpha}{\beta}} . \log(1 - m)^{\frac{1}{m}}.$$

$\sqrt[p]{\frac{\alpha}{3}}$ s'approche de l'unité et m s'approche de zéro; donc à la limite p croissant indéfiniment,

$$S = \delta . \frac{\beta - \alpha}{\log \frac{\alpha}{\beta}} . \log \frac{1}{e} = \delta . \frac{\alpha - \beta}{L \frac{\alpha}{\beta}} \text{ (log népérien).}$$

Note. MM. J. C. Dupain et de Chardonnet ont traité la même question de la même manière, et en y ajoutant la formule de quadrature par intégration de la logarithmique.

Les abscisses croissant en progression arihmétique et les ordonnées en progression géométrique, il est intuitif que les premières sont les logarithmes des secondes. C'est la considération dont s'est servi M. Rouquet, régent de mathématiques au collége de Castres.

MM. Bouterg, de Clermont; Stéphart, élève du lycée Charlemagne; Français (Émile) et A. Puget, élèves du lycée de Caen; Challiot, élève du lycée de Versailles; Lemoine, élève du Prytanée, ont eu recours à la limite d'une progression géométrique.

NOTE SUR LES QUESTIONS 453 ET 458;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nantes.

Fx étant une fonction continue dans l'intervalle de x_0 à X, dont la dérivée $F'x$ soit également continue et de plus constamment croissante ou décroissante dans cet intervalle, on sait que si $X - x_0$ se partage en n parties égales $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = X - x_{n-1} = h$, l'accroissement $FX - Fx_0$ est compris entre les deux sommes

$$h(F'x_0 + F'x_1 + \ldots + F'x_{n-1})$$

et

$$h(F'x_1 + F'x_2 + \ldots + F'x_n).$$

Cela posé :

1. Soit

$$Fx = l(1 + x),$$

d'où

$$F'x = \frac{1}{1+x};$$

faisons croître x de o jusqu'à n en prenant $L = 1$, il s'ensuit

$$l(1+n) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1}$$

$$< \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

De là

$$ln > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{l}{n}$$

$$1 + ln > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Donc

$$l(1+n) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + ln.$$

(Quest. 483, p. 66.)

2. Si on fait pour la même fonction $x_0 = n - 1$ et $X = N - 1$, on aura de même

$$lN - ln = l\frac{N}{2} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{N}$$
$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{N-1},$$

d'où, en prenant $N = 2n$,

$$l2 > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$
$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}.$$

(Quest. 488, p. 66.)

La différence des deux limites est

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n};$$

en conséquence, si n croît indéfiniment, l'expression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

a pour limite $l2$.

Qu'on prenne

$$N + np,$$

on aura

$$lp > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{np}$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{np-1},$$

et p restant fixe, si n croît indéfiniment, lp est la limite de l'expression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{np}.$$

3. Soit

$$Fx = -\frac{1}{(p-1)(x-1)^{p-1}},$$

d'où

$$F'x = \frac{1}{(x-1)^p};$$

faisons croître x indéfiniment à partir d'une première valeur $x > 1$, et soit $h = 1$. La même considération donne

$$\frac{1}{(p-1)(x-1)^{p-1}} > \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \ldots$$

$$< \frac{1}{(x-1)^p} + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \ldots$$

de sorte que

$$\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} < \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \ldots;$$

donc

$$\frac{1}{(p-1)(x-1)^{p-1}} > \frac{1}{(p-1)^{p-1}} + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \ldots.$$

On en conclut, au cas de $p > 1$, la convergence de la

série

$$\frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \ldots$$

et en particulier de la série

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{2}{4^p} + \ldots.$$

Ajoutons que si cette dernière série est poussée jusqu'au terme $\frac{1}{n^p}$ inclusivement, le reste $R = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \ldots$ se trouve compris entre $\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}$ et $\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$.

DE QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

(Fin d'un premier article, voir p. 122.)

II. Nous supposons maintenant que deux nombres Q et Q', entiers et positifs, vérifient l'équation $x^2 - ny^2 = 1$; ainsi, par hypothèse, on a l'égalité numérique

$$Q^2 - n.Q'^2 = 1.$$

Il s'agit de démontrer que l'expression fractionnaire $\frac{Q}{Q'}$ est nécessairement une réduite de rang pair de la fraction continue périodique qui représente la valeur de $\sqrt{n}$, et, qu'en outre, cette réduite correspond à l'avant-dernier quotient incomplet de l'une des périodes de la fraction continue.

Je considère, d'abord, le cas particulier où $Q' = 1$.

Dans ce cas, l'égalité supposée $Q^2 - nQ'^2 = 1$, devient $Q^2 - n = 1$, et donne $\sqrt{n} = \sqrt{Q^2 - 1}$.

Mais, en réduisant $\sqrt{Q^2-1}$ en fraction continue, on obtient

$$\sqrt{Q^2-1}=(Q-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(Q-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(Q-1)+\text{etc.}}}}}$$

On voit donc que $\frac{Q}{Q'}$, ou $\frac{Q}{1}$, est précisément la seconde réduite $(Q-1)+\frac{1}{1}$, de la fraction continue périodique qui représente la valeur de $\sqrt{n}$, et que cette réduite correspond à l'avant-dernier quotient incomplet d'une période, qui est ici la première.

En second lieu je suppose $Q'>1$.

Les nombres Q et Q' sont premiers entre eux, la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est irréductible, c'est ce qui résulte de l'égalité $Q^2-nQ'^2=1$.

De plus, si l'on désigne par α le premier quotient incomplet de la réduction de $\sqrt{n}$ en fraction continue, α sera aussi le premier quotient incomplet de la fraction continue égale à $\frac{Q}{Q'}$. Car la relation $Q^2-nQ'^2=1$ donne $\frac{Q}{Q'}=\sqrt{n+\frac{1}{Q'^2}}$, et il est clair que si $\sqrt{n}$ est compris entre les deux nombres entiers consécutifs α, $\alpha+1$, il en sera de même de $\sqrt{n+\frac{1}{Q'^2}}$.

Ainsi, en convertissant, par la règle ordinaire l'expression commensurable $\frac{Q}{Q'}$ en fraction continue, on aura une

égalité de la forme

$$\frac{Q}{Q'} = \left(\alpha + \cfrac{1}{a + \ddots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}}\right);$$

et le dénominateur q, de la dernière fraction intégrante $\frac{1}{q}$, sera plus grand que l'unité.

Si le nombre des quotients α, a,..., p, q, est impair, en remplaçant $\frac{1}{q}$ par $\cfrac{1}{(q-1)+\cfrac{1}{1}}$, il viendra

$$\frac{Q}{Q'} = \left(\alpha + \cfrac{1}{a + \ddots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{(q-1) + \cfrac{1}{1}}}}\right);$$

on peut donc, dans tous les cas, considérer les deux nombres Q et Q' comme les deux termes d'une réduite de rang pair, provenant d'une fraction continue

(1) $$\alpha + \cfrac{1}{a + \ddots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \text{etc.}}}}$$

dont le premier quotient incomplet est α, le dénominateur q de la dernière fraction intégrante $\frac{1}{q}$ de cette réduite pouvant, d'ailleurs, être égal à l'unité.

Cela posé, je désigne par $\frac{P}{P'}$ la réduite de rang im-

pair qui se termine au quotient incomplet p précédant q dans la fraction continue (1). Il s'ensuit

$$QP' - PQ' = +1 \quad \text{et} \quad P' < Q', \quad P < Q:$$

de sorte que P′ et P sont deux nombres entiers positifs moindres que Q′ et Q et qui vérifient l'équation indéterminée du premier degré

$$Qz - Q'z' = +1.$$

Cette dernière équation admet aussi la solution entière

$$z = Q - \alpha Q', \quad z' = nQ' - \alpha Q,$$

car la substitution de ces valeurs de z et z' donne

$$\begin{aligned} Qz - Q'z' &= Q(Q - \alpha Q') - Q'(nQ' - \alpha Q) \\ &= Q^2 - nQ'^2 = +1. \end{aligned}$$

De plus, le nombre $Q - \alpha Q'$ est positif et moindre que Q′ puisque la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est comprise entre α et $\alpha + 1$. De même le nombre $nQ' - \alpha Q$ est positif et moindre que Q. Cela résulte simplement de ce que l'équation

$$Qz - Q'z' = +1$$

revient à

$$z' = \frac{Qz - 1}{Q'};$$

on voit qu'à une valeur entière de z positive moindre que Q′ correspond une valeur de z' positive et plus petite que le nombre Q.

Or, on sait que l'équation indéterminée

$$Qz - Q'z' = +1$$

ne peut admettre qu'une seule solution entière positive, dans laquelle les valeurs des inconnues z et z' soient res-

pectivement plus petites que les coefficients Q′ et Q; on a donc

(2) $$P' = Q - \alpha Q',$$

(3) $$P = nQ' - \alpha Q.$$

Ces égalités établies, posons l'équation

(4) $$\sqrt{n} = \alpha + \cfrac{1}{a + \cdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{\alpha + x}}}};$$

d'où

$$\sqrt{n} = \frac{Q(\alpha + x) + P}{Q'(\alpha + x) + P'} = \frac{Q\alpha + P + Qx}{Q'\alpha + P' + Q'x}.$$

En ayant égard aux égalités (2) et (3), cette dernière équation se réduit à

$$\sqrt{n} = \frac{nQ' + Qx}{Q + Q'x}.$$

On en tire

$$x = \frac{Q\sqrt{n} - nQ'}{Q - Q'\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}.(Q - Q'\sqrt{n})}{Q - Q'\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Par suite l'équation (4) donne

$$\sqrt{n} = \alpha + \cfrac{1}{a + \cdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{2\alpha + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}};$$

résultat qui montre qu'effectivement la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est

une réduite correspondante à l'avant-dernier quotient incomplet d'une période de la fraction continue dont la valeur est $\sqrt{n}$. C'est ce qu'il fallait démontrer. G.

RECTIFICATION.

Page 205 (problème 19) du *Programme* que j'ai publié avec M. Roguet, au lieu de « angle *quelconque*, » il faut lire « angle *droit*. »

Cette rectification m'a été indiquée par Mlle Adolphine D***. Les *Nouvelles Annales* doivent déjà à Mlle Adolphine D*** plusieurs excellents articles. (*voir* t. XVI, p. 288). G.

NOTE SUR UNE QUESTION DE MINIMUM RELATIVE AUX POLYGONES RÉGULIERS;

PAR M. MOURGUE,
Professeur au lycée Napoléon.

THÉORÈME. *Le centre d'un polygone régulier est le point pour lequel la somme des* $m^{\text{ièmes}}$ *puissances de ses distances aux sommets ou aux côtés de ce polygone est la plus petite possible.*

Pour le démontrer, il suffit de considérer dans le plan du polygone un point X différent du centre O, et de faire voir qu'il en existe un second pour lequel la somme des distances de l'ordre m est moindre.

Admettons un instant la proposition suivante :

LEMME. *Si trois nombres positifs* x, y, a, *dont les deux*

premiers sont inégaux, vérifient

(1) $$x + y \geqq 2a,$$

ils vérifieront aussi l'inégalité

(2) $$x^m + y^m > 2a^m.$$

Corollaire. Si x, y, a, désignent respectivement deux côtés d'un triangle et la médiane qu'ils comprennent, ou bien encore les deux bases d'un trapèze et la parallèle équidistante, la relation (1) sera satisfaite et par suite aussi (2).

Cela posé, figurons-nous la circonférence décrite de O comme centre avec OX pour rayon, et inscrivons-y, à partir de X, un polygone semblable au proposé polygone.

Soit Y le second sommet dans l'ordre de l'inscription. Les distances respectives de X et de Y à deux sommets ou à deux côtés qui se succèdent, dans le polygone proposé, suivant l'ordre précédent, sont égales comme côtés homologues des triangles évidemment égaux, qu'on obtient en joignant le centre aux extrémités de ces droites.

Par conséquent aussi les m[ièmes] *puissances des distances du point* X, *aux sommets ou aux côtés du polygone donné, sont respectivement égales à celles qui concernent le point* Y.

En second lieu, soit A le milieu de XY et x, y, a les distances des points X, Y, A, à un sommet ou à un côté quelconque du polygone. En vertu du corollaire on aura

$$x^m + y^m > 2 . a^m;$$

d'où, par addition des inégalités analogues,

$$\sum x^m + \sum y^m > 2 \sum a^m.$$

Mais

$$\sum x^m = \sum y^m;$$

que Gauss a considérée d'une manière générale et avec toute la rigueur désirable. Il a exprimé la somme de cette série par des fonctions *gamma*, et donné la condition nécessaire et suffisante de sa convergence qui est simplement la suivante

$$\alpha + \beta + \gamma \leqq 0.$$

En faisant

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = 1,$$

on trouve la formule de M. Catalan.

On peut aussi la démontrer par la méthode de Parseval. On a

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1.1}{2.4}x^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}x^3 - \ldots,$$

$$\sqrt{1-x^{-1}} = 1 - \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1.1}{2.4}x^{-2} - \frac{1.1.3}{2.4.6}x^{-3} - \ldots;$$

séries qui sont convergentes *toutes les deux* lorsque le *module* analytique de x est l'unité. En multipliant, on obtient un résultat de cette forme

$$(1) \qquad \sqrt{2-(x+x^{-1})} = A + \sum Bx^m + \sum Cx^{-n},$$

où

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 + \ldots.$$

Je fais maintenant

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

je multiplie (1) par $d\varphi$ et j'intègre de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$. Il vient

$$\sqrt{2-(x+x^{-1})} = \sqrt{2-2\cos\varphi} = 2\sin\frac{1}{2}\varphi,$$

$$x^m = \cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi,$$

$$x^{-n} = \cos n\varphi - \sqrt{-1}\sin n\varphi,$$

et, par suite,

$$8 = A.2\pi, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{4}{\pi}.$$

On a une autre démonstration en multipliant l'équation

$$1 - \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} z^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.1}{2.4} z^4 \sin^4 \varphi$$
$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6} z^6 \sin^6 \varphi + \ldots$$

par $\frac{dz\,d\varphi}{z^2}$ et intégrant entre les limites $z = 0$, $z = 1$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$.

Je remarquerai encore que Gauss a aussi transformé la série $F(\alpha, \beta, \gamma)$ en fraction continue, et en un produit d'une infinité de facteurs, mais qu'il n'est pas l'inventeur de la décomposition de l'intégrale eulérienne $B(p, q)$ en un nombre infini de facteurs : cette décomposition est due à Euler lui-même dont les formules et les méthodes sont rapportées par Lacroix dans le III volume de son grand Traité.

LIEU GÉOMÉTRIQUE DE CERTAIN POINT DANS LES CONIQUES.

1. Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

l'équation d'une conique rapportée à des axes quelconques.

Supposons que le coefficient C varie de $-\infty$ à $+\infty$ et que les cinq autres coefficients soient des fonctions entières algébriques *données* de deux quantités α et β;

$$dy + ex + f = 0$$
$$d_1 y + e_1 x + f_1 = 0,$$

sont les équations *données* de deux droites tangentes à la conique; il s'agit de trouver le lieu géométrique du point qui a pour coordonnées α et β.

L'équation de condition pour que la première droite soit tangente, est

$$4C[fdD - f^2A - d^2F] + d^2E^2 + e^2[D^2 - 4AF] + f^2B^2$$
$$+ 2de[2BF - DE] - 2fdBF + 2fe[2AE - BD] = 0.$$

(*Voir* les *Nouvelles Annales*, t. II, p. 108.)

On a une équation semblable pour la seconde droite.

Éliminant C, on trouve pour l'équation du lieu cherché

$$\left.\begin{array}{l}
AE^2[d^2f_1^2 - d_1^2f^2] \\
DE^2dd_1[d_1f - df_1] \\
F[D^2 - 4AF][e^2d_1^2 - e_1^2d] \\
A[D^2 - 4AF][e^2f_1^2 - e_1^2f^2] \\
D[D^2 - 4AF][e_1^2fd - e^2f_1d_1] \\
B^2F[f^2d_1^2 - f_1^2d^2] \\
B^2Dff_1[f_1d - fd_1] \\
2F[2BF - DE]dd_1[d_1e - de_1] \\
2A[2BF - DE][def_1^2 - d_1e_1f^2] \\
2D[2BF - DE]dd_1[e_1f - ef_1] \\
+ 2BEFdd_1[df_1 - d_1f] \\
+ 2BEAff_1[fd_1 - f_1d] \\
+ 2F[2AE - BD][fed_1^2 - f_1e_1d^2] \\
+ 2A[2AE - BD]ff_1[f_1e - fe_1] \\
+ 2D[2AE - BD]ff_1[de_1 - d_1e]
\end{array}\right\} = 0,$$

Lorsque $B = 0$ et que $D^2 - 4AF$ a un facteur commun en α et β avec E, le degré du lieu s'abaisse; de même si A a un facteur commun en α et β avec D.

Application. Soit

$$A = 1,\quad B = 0,\quad D = -2\beta,\quad E = -2\alpha,\quad F = \alpha^2 + \beta^2,$$

l'équation du lieu devient, après avoir divisé par α,

$$(A)\quad\left\{\begin{array}{l}[e^2d_1^2]\alpha^3+2dd_1[de_1]\alpha^2\beta+[e^2d_1^2]\alpha\beta^2+2dd_1[de_1]\beta^3\\ \qquad+2\alpha^2[f_1e_1d^2]+2[e^2f_1d_1]\alpha\beta+2\beta^2[f_1e_1d^2]\\ \qquad+[d^2f_1^2]\alpha+2\beta[ef'+e'f][df_1]+2ff_1[f_1e].\end{array}\right.$$

Les termes du troisième degré peuvent se mettre sous la forme

$$[\alpha^2+\beta^2][\alpha(e^2d_1^2]+2\beta\, dd_1(de_1)];$$

ainsi il n'y a qu'une asymptote réelle (*).

Lieu du centre.

Ordonnant l'équation (A) par rapport à α, on a

$$(B)\qquad P\alpha^3+Q\alpha^2+R\alpha+S=0;$$

$$P=[e^2d_1^2],$$
$$Q=2dd_1[de_1]\beta+2[f_1e_1d^2],$$
$$R=[e^2d_1^2]\beta^2+[f_1d_1e^2]+[d^2f_1^2],$$
$$S=2dd_1[de_1]\beta^3+2[f_1e_1d^2]\beta^2+2[ef_1+e_1f)[df_1]\beta$$
$$+2ff_1[f_1e].$$

désignons par α', α'', α''' les trois racines de l'équation (B) et par x, y les coordonnées du centre, on a

$$y=\beta,$$

et l'équation du lieu du centre est

$$\left(x-\frac{\alpha'+\alpha''}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha'+\alpha'''}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha''+\alpha'''}{2}\right).$$

La théorie des fonctions symétriques donne

$$8P^2x^3-8PQx^2+2x(RP-Q^2]+P(QR-S)=0,$$

dans laquelle on remplace β par y. Ainsi, on obtient une équation du troisième degré, en x et y; ce qu'on pouvait prévoir à priori.

(*) *Cas particulier.* α, β, coordonnées du foyer; axe des y directrice; axes rectangulaires.

SUR LE TRIANGLE INSCRIT ET CIRCONSCRIT;

D'APRÈS ANDREWS HART.

1. *Lemme.* Soient A, B, C, D, M cinq fonctions linéaires à deux variables.

$AB = CD$ est l'équation d'une conique passant par les points d'intersection de A avec C et D; de B avec C et D.

$AB = M^2$ est l'équation d'une conique touchant les droites A et B, et la corde de contact est M.

$CD = M^2$ est l'équation d'une conique touchant les droites C et D, et il est évident que les trois coniques passent par les mêmes quatre points, et que les quatre points de contact sont sur la même droite M, car une de ces deux équations est la conséquence des deux autres.

2. Soient ABC, *abc* deux triangles inscrits dans la même conique P.

Si AB et *ab* touchent la conique Q, alors A*a* et B*b* touchent une conique X passant par les quatre points I d'intersection de P et Q (lemme I).

Si BC et *bc* touchent une conique R, passant par les mêmes quatre points, alors B*b* et C*c* toucheront la conique X.

Et puisque A*a* et C*c* touchent une conique X, il s'ensuit que AC et *ac* touchent une conique S qui passe par les mêmes quatre points I. (CAYLEY.)

RELATION CIRCULAIRE DE MOBIUS.

Soient A, B, C, P quatre points dans un plan.

ω cercle passant par A, B, C;

α cercle passant par B, C, P;

β cercle passant par A, C, P;

γ cercle passant par A, B, P.

Soient A′, B′, C′ trois autres points pris posés arbitrai-dans le même plan;

ω' cercle passant par A′, B′, C′;

α' cercle passant par B′, C′ et faisant avec le cercle ω' même angle que α avec ω;

β' cercle passant par A′ et C′, et faisant avec le cercle ω' même angle que β avec ω;

γ' cercle passant par A′ et B′ et faisant avec le cercle ω' même angle que γ avec ω.

Alors α', β', γ' se couperont à un même point P′; et

ω' passe par les trois points A′, B′, C′;

α' passe par les trois points B′, C′, P′;

β' passe par les trois points A′, C′, P′;

γ' passe par les trois points A′, B′, P′;

de sorte que P et P′ se correspondent.

Ainsi étant donnée une figure plane quelconque, on peut tracer une autre correspondante telle, que quatre points de la première figure étant sur un cercle, quatre points de l'autre figure sont aussi sur un cercle.

C'est une *cyclographie* analogue à la *grammagraphie*, autrement dit *homographie*. On peut aussi imaginer une *sphérographie*.

TRANSFORMATION DES MODULES DANS LES CONGRUENCES DU PREMIER DEGRÉ,

Caractères de divisibilité des nombres;

D'APRÈS BOUNIAKOWSKY.

---

1. $N - r = \dot{p}$, p est un nombre quelconque; cela veut dire que $N - r$ est divisible par p, et p est dit *module;* il s'agit de trouver r.

Soit

$$N = (p+n)q_1 + r_1, \quad \text{ou} \quad r_1 < p+n,$$
$$nq_1 = (p+n)q_2 + r_2, \quad n \text{ nombre entier arbitraire},$$
$$nq_2 = (p+n)q_3 + n_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$nq_{m-1} = (p+n)q_m + r_m, \quad \text{ou} \quad nq_m < p+n,$$

ainsi

$$(1) \left\{ \begin{aligned} N &= (q_1+q_2+q_3+\ldots+q_m)p+r_1+r_2+r_3+\ldots+nq_m \\ &= (q_1+q_2+q_3+\ldots+q_m)p+N'. \end{aligned} \right.$$

Si N' est inférieur à p, on a

$$N' = r.$$

Si N' surpasse $p+n$, on le divise par p et on a le reste cherché r; si p' surpasse encore $p+n$, on agit comme ci-dessus sur N, on parvient à

$$N'' = r'_1 + r'_2 + r'_3 + \ldots + nq'_m,$$

ou

$$N' = \dot{p} + N'', \quad \text{et} \quad N'' < N';$$

et continuant de même on parvient à $N^{(\mu)}$ moindre que $p+n$.

2. Dans notre système de numération, on choisit n de manière que $p+n$ soit une puissance de 10; ce qui donne les restes à vue.

1°. *Exemple.* $p=9$; faisant $n=1$, $p+n=10$, on tombe sur la règle connue; car les r sont les chiffres de N.

2°. $N=3678912$, $p=989$, prenons $n=11$, de sorte que $p+n=10^3$, alors

$$\begin{array}{ll}
3678 = q_1; & r_1 = 912 \\
3678 & r_2 = 458 \\
\overline{40{,}458} & r_3 = 440 \\
40 & \overline{r_1+r_2+r_3 = 1810 = 989 + 821} \\
\overline{440} &
\end{array}$$

ainsi le reste de N divisé par 983 est 821

On a ainsi un caractère de divisibilité pour 989.

3. Prenons n négativement, alors

$$\begin{aligned}
N &= (p-n)\,q_1 + r_1, \\
-nq_1 &= -(p-n)\,q_2 - r_2, \\
nq_2 &= (p-n)\,q_3 + r_3, \\
-nq_3 &= -(p-n)\,q_4 - r_4, \\
\pm nq_{m-1} &= \pm(p-n)\,q_m \pm r_m,
\end{aligned}$$

d'où

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} N = (q_1 - q_2 + q_3 \pm q_m)p + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots \\ \pm r_m \mp nq_m. \end{array} \right.$$

On emploie cette formule lorsque p est trop éloigné d'une puissance de 10.

Soit, par exemple,

$$N = 732865, \quad p = 37,$$

on prendra

$$10^2 = 3.37 - 11,$$

7 3 2 8,6 5	$r_1 = 65$, $r_2 = 8$	
7 3 2 8	$r_3 = 66$, $r_4 = 48$	
—	—	$r'_1 = 55$, $r'_2 = 11$
8 0 6,0 8	$r_5 = 99$, 76	− 11
8 0 6	—	—
—	230	43
8 8.6 6	− 76	37
8 8	—	—
—	1,54	6
9,6 8	11	
9 9	—	
	11	

Ainsi le reste de la division est 6.

En effet,

$$732865 = 37.19827 + 6.$$

QUESTIONS.

470. Si sur la diagonale d'un rectangle comme corde on décrit un cercle, le lieu des extrémités d'un diamètre parallèle à l'autre diagonale est une hyperbole équilatère. (KUPPER, de Trèves.)

471. Tous les cercles qui sont la perspective d'une même conique sur un même plan, ont pour axe radical commun l'intersection de ce plan avec le plan de la conique. (O. BOKLEN.)

472. Les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont les éléments rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe. (STEINER.)

473. Quatre génératrices d'un hyperboloïde étant données, construire le tétraèdre qui ait ces quatre droites pour hauteurs.

474. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1, & a_1 - b_2, & a_1 - b_3, \ldots, & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1, & a_2 - b_2, & a_2 - b_3, \ldots, & a_2 - b_n \\ a_3 - b_1, & a_3 - b_2, & a_3 - b_3, \ldots, & a_3 - b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n - b_1, & a_n - b_2, & a_n - b_3, \ldots, & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

est égal à $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$ lorsque $n = 2$, et pour $n > 2$ il est nul.

475. Construire la conique lorsqu'on donne trois tangentes et une directrice (p. 165).

476. *Cercle des huit points.* ABCD est un quadrilatère plan, E intersection des côtés opposés AC, BD; F intersection de AB, CD. Il y a quatre triangles de formés. AB avec son prolongement fait partie de ces trois triangles ABE, ACF, BDF; dans le triangle ABE, joignons E opposé à AB avec le centre du cercle circonscrit à ce triangle; dans le triangle BDF, joignons D opposé au prolongement BF de AB, avec le centre du cercle circonscrit à ce triangle; dans le triangle ACF, joignons C opposé à la droite BAF avec le centre du cercle circonscrit au triangle ACF; ces trois droites se coupent en un même point I. Les trois autres côtés du quadrilatère fournissent d'une manière analogue trois autres points I; ces quatre points I et les quatre centres des cercles circonscrits sont sur la même circonférence (*). (HERMES.)

477. Les projections du sommet d'un triangle rectiligne sur les quatre bissectrices des deux autres angles sont en ligne droite. (ARTHUR LASCASES, de Lorient.)

478. A, B, C trois points fixes, $AB = c$, $BC = a$,

(*) L'existence de quatre centres sur une circonférence est une découverte de Steiner, démontrée dans les *Nouvelles Annales*.

CA $= b$, α, β, γ distances respectives des trois points à une droite fixe, l'on a

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\alpha\beta - (b^2 + c^2 - a^2)\beta\gamma$$
$$+ (c^2 + a^2 - b^2)\gamma\alpha = 4S^2,$$

S = aire du triangle ABC. (SALMON.) (*)

479.

$$a^n + b^n = (a+b)^n - nab(a+b)^{n-2} + \frac{n.n-3}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-4}$$
$$+ \frac{n.n-4.n-5}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{n-6}$$
$$+ \frac{n.n-5.n-6.n-7}{1.2.3.4}a^4b^4(a+b)^{n-8}$$
$$+ \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.2.3\,4.5}a^5b^5(a+b)^{n-10} + \ldots,$$

n entier positif; on arrête la série lorsque l'exposant de $(a+b)$ devient négatif. (STERN.)

LIMITES DE LA SÉRIE HARMONIQUE
(Solution des questions 452 et 453);

D'APRÈS M. SCHLÖMILCH.

1. *Lemme.*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > n\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}.$$

2. $$\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} > (n+1)^{\frac{1}{n}} \text{ (lemme)},$$

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \ldots + \frac{n}{n} = n,$$

(*) Vient de publier dix-sept *Lessons* sur l'*algèbre supérieure moderne*, préliminaires d'un ouvrage sur les *High surfaces*, faisant suite aux *High curves*; clarté extrême, profondeur et élévation. Nous en parlerons souvent.

d'où par soustraction

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > n\left[(1+n)^{\frac{1}{n}} - 1\right].$$

3.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} > n\,(n+1)^{-\frac{1}{n}},$$

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \ldots + \frac{n+1}{n+1} = n,$$

par soustraction

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} < n\left[1 - (n+1)\right]^{-\frac{1}{n}},$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left[1 - (n+1)^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right];$$

c'est la solution de la question 452 (t. XVII, p. 434).

Posons

$$e^{n\delta} = n+1, \quad n\delta = l.n+1, \quad n = \frac{l.(n+1)}{\delta},$$

ainsi

$$S_n > \frac{l.n+1}{\delta}(e^{\delta} - 1),$$

$$S_n < \frac{n}{n+1} + \frac{l\,n+1}{\delta}(1 - e^{-\delta}).$$

Or

$$1 < \frac{e^{\delta} - 1}{\delta},$$

$$1 > \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta};$$

donc

$$S_n > l\,(n+1),$$
$$S_n < 1 + l(n+1);$$

c'est la solution de la question 453.

Le rapport arithmétique des deux limites est constant; le rapport géométrique approche de l'unité avec n croissant : donc la différence entre S_n et ses limites diminue de plus en plus.

M. Schlömilch fait observer que les limites logarithmiques peuvent s'obtenir par la considération des séries $l(1+x)$ et $\log(1-x)$; c'est ce qu'a fait l'élève Michaux (p. 68).

Le procédé de M. Schlömilch s'applique à la série

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}+\ldots+\frac{1}{\alpha+n}.$$

DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES DE M. STEINER

(voir t. XVII, p. 434);

PAR M. DEWULF.

THÉORÈME I. *P, P_1 étant deux points* quelconques *situés dans le plan d'une courbe de degré n, les pieds des normales abaissées de ces deux points sur la courbe sont distribués respectivement sur deux courbes chacune de degré n ayant en commun n^2-n+1 points fixes, savoir les $(n-1)^2$ points, pôles de la droite située à l'infini, pôles pris par rapport à la courbe donnée et n points situés à l'infini.*

Rappelons d'abord comment on détermine les pôles d'une droite par rapport à une courbe de degré n.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de cette courbe; cette équation peut être mise sous la forme

$$\varphi_n+\varphi_{n-1}+\varphi_{n-2}+\ldots+\varphi_1+\varphi_0=0,$$

φ_r représentant l'agrégat des termes de degré r.

Si l'on mène une tangente à cette courbe par le point (α, β), on aura pour déterminer les points de contact, les deux équations

$$F(x, y) = 0, \quad (\beta - y)\frac{dF}{dy} + (\alpha - x)\frac{dF}{dx} = 0.$$

La dernière de ces équations s'abaisse au degré $n - 1$ et se met sous la forme

$$(1) \qquad \beta \frac{dF}{dy} + \alpha \frac{dF}{dx} + k = 0,$$

en posant

$$k = \varphi_{m-1} + 2\varphi_{m-2} + \ldots + (n-1)\varphi_1 + n\varphi_0.$$

Cette courbe se nomme la *première polaire* du point (α, β) par rapport à la courbe.

Si le point (α, β) parcourt la droite

$$(2) \qquad y = Ax + B;$$

on aura

$$\beta = A\alpha + B;$$

ce qui permet de mettre l'équation (1) sous la forme

$$\left(A\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dx}\right)\alpha + B\frac{dF}{dy} + k = 0,$$

qui est l'équation générale de toutes les premières polaires des différents points de la droite donnée.

Cette équation est satisfaite quelle que soit la valeur de α si l'on pose

$$(3) \qquad A\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dx} = 0,$$

$$(4) \qquad B\frac{dF}{dy} + k = 0.$$

Ces deux courbes sont de degré $(n-1)$ et se coupent en $(n-1)^2$ points.

Donc les premières polaires de tous les points d'une droite par rapport à une courbe de degré n passent par $(n-1)^2$ points fixes, que l'on nomme *pôles* de la droite par rapport à la courbe.

Si la droite (2) passe à l'infini, les équations (3) et (4) deviennent

$$A\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dx}=0, \quad \frac{dF}{dy}=0,$$

ou bien

$$\frac{dF}{dx}=0, \quad \frac{dF}{dy}=0.$$

Remarque. Les pôles de la droite située à l'infini sont sur la courbe de degré $(n-1)$

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}=0,$$

qui renferme aussi les points multiples de la courbe donnée. (*Théorème* de Plücker.)

Passons à la démonstration du théorème de Steiner.

On a pour déterminer les points où les normales à une courbe menée par un point donné la coupent normalement, les deux équations

$$F(x,\ y)=0,$$

$$(5) \qquad (\beta-y)\frac{dF}{dx}-(\alpha-x)\frac{dF}{dy}=0.$$

Ces deux équations sont du degré n.

On conclut de là que par un point on peut généralement mener n^2 normales à une courbe du degré n. Ce faisceau de n^2 normales coupe la courbe en n^3 points. Les n^2 points où le faisceau coupe la courbe à angle droit

sont sur une courbe de degré n. On sait d'ailleurs (SALMON, *Nouvelles Annales*, t. IX, p. 274) que les $n^3 - n^2$ points où le faisceau normal coupe la courbe obliquement sont sur une courbe de degré $n(n-1)$.

L'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$\beta \frac{dF}{dx} - \alpha \frac{dF}{dy} - \left(y \frac{dF}{dx} - x \frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Si le point (α, β) parcourt la droite

$$y = Ax + B,$$

la relation

$$\beta = A\alpha + B$$

permettra de mettre l'équation (5) sous la forme

$$\left(A \frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)\alpha - \left(y \frac{dF}{dx} - x \frac{dF}{dy} - B \frac{dF}{dx}\right) = 0,$$

qui est l'équation générale de toutes les courbes, lieux des pieds des normales abaissées des différents points de la droite (2) à la courbe.

Cette équation est satisfaite, quelle que soit la valeur de α, si l'on pose

(6) $$A \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} = 0$$

(7) $$(y - B) \frac{dF}{dx} - x \frac{dF}{dy} = 0.$$

Ces courbes sont l'une du degré n, l'autre du degré $(n-1)$ et se coupent par conséquent en $n(n-1)$ points fixes.

L'équation (7), en y remplaçant $\frac{dF}{dy}$ par sa valeur tirée de l'équation (6), devient

(8) $$(y - B) \frac{dF}{dx} = Ax \frac{dF}{dx}.$$

Cette équation est satisfaite si l'on pose

$$y - B = Ax,$$

ce qui prouve que n des $n(n-1)$ points d'intersection des équations (6) et (7) sont sur la droite donnée.

L'équation (8) est aussi satisfaite si l'on pose

$$\frac{dF}{dx} = 0;$$

mais alors d'après l'équation (6) on a aussi

$$\frac{dF}{dy} = 0.$$

Donc, parmi les $n(n-1)$ points d'intersection des équations (6) et (7), $(n-1)^2$ se trouvent à l'intersection de $\frac{dF}{dx} = 0$ et $\frac{dF}{dy} = 0$, et ne sont, par conséquent, autres que les $(n-1)^2$ pôles de la droite située à l'infini par rapport à la courbe donnée.

Nota. Je crois que l'énoncé donné dans les *Nouvelles Annales* est inexact (t. XIV, p. 232). Il ne peut y avoir n points à l'infini.

En effet à chaque point à l'infini correspondent des asymptotes parallèles pour les courbes des équations (6) et (7).

L'équation (6) ne peut donner que $(n-1)$ asymptotes étant de degré $(n-1)$. D'ailleurs les équations qui donnent les coefficients angulaires de ces asymptotes sont

$$A\frac{d\varphi_n(1, c)}{dx} - \frac{d\varphi_n(1, c)}{dy} = 0,$$

$$(\alpha) \qquad e\frac{d\varphi_n(1, c)}{dx} - \frac{d\varphi_n(1, c)}{dy} = 0.$$

Il est évident que toute valeur de c différente de A ne peut satisfaire en même temps à ces deux équations. Les

points à l'infini sont donc tous sur la droite $y = Ax + B$, mais pour qu'il y ait $(n - 1)$ points à l'infini, l'équation (α) devrait avoir $n - 1$ racines égales à A, ce qui n'a pas lieu en général.

Il faut donc énoncer le théorème ainsi :

Étant donnée une droite quelconque dans le plan d'une courbe de degré n, les pieds des normales abaissées des différents points de cette droite sont distribués respectivement sur des courbes chacune de degré n ayant en commun $n^2 - n$ points fixes, $(n-1)^2$ de ces points sont les pôles de la droite située à l'infini et n de ces points sont sur la droite donnée.

En appelant *podaire* d'un point par rapport à une courbe de degré n la courbe de degré n qui renferme les n^2 points où le faisceau normal coupe la courbe à angle droit, on pourrait dire : un point a par rapport à une courbe une infinité de podaires toutes de degré n, et chacune d'elles est podaire au point fixe par rapport à toutes celles qui la précèdent dans la série.

Théorème II. *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe de la classe n est une courbe de degré n^2* (*).

Soient

$$F(p, q) = 0, \quad py + qx = 1,$$

les équations d'une courbe de la classe n. On sait que $F(p, q)$ doit être de degré n.

La droite $py + px = 1$ dans chacune de ses positions est tangente à la courbe. Les coordonnées ordinaires du sommet de l'angle droit circonscrit à la courbe seront donc données par les deux équations

$$(1) \qquad p_1 Y + q_1 X = 1,$$

$$(2) \qquad p_2 Y + q_2 X = 1,$$

(*) Dans les coniques, ce lieu est un *cercle double*. Tm.

distance à la droite fixe du sommet du polygone déterminé par ces deux côtés.

Dans ces théorèmes, le mot *somme* doit être pris dans le sens de somme algébrique.

Relativement aux courbes planes, on voit que :

1°. *Si l'on considère une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits, l'intégrale qui donnera la somme de tous les triangles qui auraient pour bases ces côtés et pour sommets communs un point arbitraire de son plan, divisés respectivement par le produit des distances de leurs sommets à une droite fixe, sera constante.*

2°. *Si l'on projette chaque élément d'une courbe sur une droite fixe* I *par des parallèles de direction arbitraire, l'intégrale qui donnera la somme de ces projections divisées respectivement par le carré de la distance de l'élément correspondant à la droite* I, *sera constante, quelle que soit la direction des parallèles.*

3°. *Si l'on trace une droite* P *dans le plan d'une courbe, l'intégrale qui donnera la somme des triangles ayant pour côtés cette droite* P *et deux éléments consécutifs de la courbe, divisés respectivement par le produit des distances de ses sommets à une droite fixe, sera constante, quelle que soit la droite* P.

On doit remarquer que les courbes dont nous parlons ne sont pas nécessairement soumises à une définition mathématique : nos théorèmes ont lieu pour des courbes tracées au hasard.

Deux cercles étant concentriques, si d'un point de l'un on mène des tangentes à l'autre et que l'on trace la corde de contact, on forme un triangle dont l'aire est constante.

La transformation homographique donne ce théorème :

Lorsque deux coniques ont un double contact suivant

une droite I, et que d'un point de l'une on mène des tangentes à l'autre, elles déterminent avec la corde de contact de ces tangentes un triangle tel, que le rapport de son aire au produit des perpendiculaires abaissées de ses sommets sur la droite I, *est constant.*

Si la droite I est à l'infini, les deux coniques sont homothétiques et l'aire du triangle est constante.

Dans l'hyperbole, l'aire du triangle déterminé par les asymptotes et une tangente est constant. Donc :

Étant données une conique et deux tangentes fixes, une tangente variable détermine avec celles-ci un triangle tel, que le rapport de son aire au produit des distances de ses sommets à la corde de contact des tangentes fixes est constant.

Deux rayons rectangulaires et la droite qui joint deux de leurs points d'intersections avec le cercle déterminent un triangle dont l'aire est constante. Donc :

Étant donnés une conique et un point O, *si l'on mène par ce point deux droites conjuguées et que l'on joigne deux de leurs points d'intersections avec la conique, le rapport de l'aire du triangle ainsi formé au produit des distances de ses sommets à la polaire du point* O *sera une quantité constante.*

Rappelons que deux droites *conjuguées* relatives à un point O sont deux droites telles, que le pôle de l'une se trouve sur l'autre.

Si dans le théorème précédent la polaire du point O est à l'infini, ce point est le centre de la conique; les droites qui y passent deviennent des diamètres conjugués, et l'aire du triangle construit sur ces diamètres est constant (théorème d'Apollonius).

Lorsque deux triangles $a' b' c'$, $a'_1 b'_1 c'_1$ ont leurs côtés homologues parallèles, l'aire d'un triangle *def* à la fois

inscrit dans l'un et circonscrit dans l'autre est moyenne proportionnelle entre les aires des triangles semblables.

De là : *Lorsque les côtés de deux triangles* abc, $a_1b_1c_1$ *se coupent deux à deux sur une droite* I (*triangles homologiques*), *si l'on inscrit dans l'un un triangle* def, *circonscrit à l'autre, on a la relation*

$$\frac{\overline{def}^2}{\delta^2.\varepsilon^2.\varphi^2}=\frac{abc.a_1b_1c_1}{\alpha.\beta.\gamma.\alpha_1.\beta_1.\gamma_1},$$

où les lettres grecques représentent les distances des points correspondants à la droite I.

Si un triangle $a'b'c'$ dont les sommets sont situés respectivement sur trois droites parallèles A', B', C' se meut parallèlement à lui-même, il conserve une aire constante.

Donc :

Étant donné un faisceau de quatre droites A, B, C, I *et trois points fixes sur cette dernière droite, si l'on inscrit dans les trois premières un triangle* abc *dont les côtés passent respectivement par les points fixes, l'aire de ce triangle divisée par le produit des distances de ses sommets à la droite* I *donne un quotient constant.*

La suite prochainement.

SOLUTION DE LA QUESTION 469

(voir page 118);

PAR M. A. POITRASSON, S. J.
Du séminaire de Vals (Haute-Loire).

Soient le triangle ABC et D un point sur BC : on a

$$(\alpha)\qquad \overline{AB}^2.CD+\overline{AC}^2.BD-\overline{AD}^2.BC=BC.CD.DB.$$

Ce théorème n'est que la reproduction du théorème suivant, démontré par Carnot.

Dans tout triangle, si du sommet de l'un quelconque des angles on mène une transversale à la base opposée (de manière qu'elle coupe cette base et non son prolongement), le carré de cette transversale, multiplié par cette base, est égale à la somme des carrés des deux autres côtés, multipliés chacun par le segment opposé de cette base, moins cette même base multipliée par le produit de deux segments (*Géométrie de position,* p. 263).

M. Chasles (*Géométrie supérieure,* p, 233) a généralisé ce théorème en disant que :

« Etant donné un nombre impair $(2\nu + 1)$ de points $a, b, c,$ etc., en ligne droite, et étant pris un point quelconque m sur la droite ou en dehors, indifféremment, on a toujours l'équation

$$\frac{\overline{am}^{2\nu}}{ab.ac.ad\ldots} + \frac{\overline{bm}^{2\nu}}{bc.bd.be\ldots} + \ldots = 1;$$

équation qui devient, dans le cas où

$$(2\nu + 1) = 3;$$

les trois points étant B, C, D et A le point arbitraire,

$$\frac{\overline{AB}^2}{DB.CB} + \frac{\overline{AC}^2}{CD.BC} + \frac{\overline{AD}^2}{BD.DC} = 1,$$

ou

$$\overline{AB}^2.CD + \overline{AC}^2.DB + \overline{AD}^2.BC + BC.DC.BD = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (α), dans laquelle on a donné un signe contraire aux segments comptés de gauche à droite et à ceux comptés de droite à gauche.

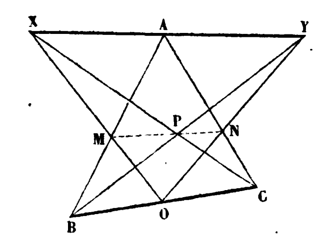
Note. MM. Raphael Girard, élève de l'institution Delorme, à Lyon (classe de M. Adanson), Brault, Chauliac et Françoise, ont envoyé des solutions *directes*.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 460 (*)

(voir p. 108);

PAR M. A. POITRASSON, S. J.
Du séminaire de Vals.

On donne un triangle ABC et deux points X, Y en ligne droite avec son sommet A; on joint les points X, Y avec un point quelconque O de BC par les droites OX, OY qui coupent AB, AC en deux points M, N. La droite MN passe par un point fixe quel que soit le point O.



En effet les six points A, B, C, X, Y, O sont les sommets d'un hexagone ABYOXC inscrit aux deux droites XY, BC; donc, d'après un théorème connu (Poncelet, *Propriétés projectives*, sect. II, chap. I, n° 170) les points de concours des côtés opposés AB, OX; BY, XC; YO, CA sont en ligne droite, et comme BY et CX ne changent pas quel que soit le point O, la droite MN passera tou-

---

(*) Excellente solution.

jours par le point P, intersection des deux côtés XC, YB.

C. Q. F. D.

Corollaire. BC étant supposé à l'infini, la proposition est encore vraie et l'énoncé se change en celui-ci :

Étant donné un angle BAC et deux points X, Y en ligne droite avec son sommet, si par les points X et Y on mène deux droites parallèles qui rencontrent les côtés de l'angle en des points M, N, la droite MN passera toujours par le même point, quelle que soit la direction des droites parallèles XM, YN.

EXERCICE NUMÉRIQUE SUR LES CONIQUES.

Équations de deux coniques.

$$7y^2 - 3xy + 5x^2 - 8y - 2x + 3 = 0,$$

$$8y^2 + xy + 8x^2 - 11y - 7x + 5 = 0.$$

Coordonnées des quatre points d'intersection.

$$x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{2}{3},$$

$$x = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{3}{5},$$

$$x = \frac{3}{7}, \quad y = \frac{5}{7},$$

$$x = \frac{5}{11}, \quad y = \frac{7}{11}.$$

GRAND CONCOURS DE 1857

(voir t. XVI, p. 109);

Étant données deux coniques C et C', on mène dans la première tous les systèmes possibles de diamètres conjugués, et, par un point de la circonférence de l'autre, on mène des parallèles aux diamètres de chaque système. Faire voir que la droite qui joint les seconds points d'intersection de ces parallèles avec la courbe passent par un même point.

Note. Cette question n'a été insérée ni dans le Journal, ni dans la Revue de l'Instruction publique; j'en dois la communication à l'obligeance de M. Hauser, professeur au lycée Charlemagne.

GRAND CONCOURS DE 1858.

CLASSE DE LOGIQUE (SECTION DES SCIENCES) (10 juillet).

Mathématiques.

1°. Étant donnés deux angles trièdres égaux et ayant le même sommet, on peut toujours mener par le sommet une droite telle, que si l'on fait tourner le premier trièdre autour de cette droite comme axe, il vienne coïncider avec le second.

2°. Deux nombres n et n' jouissent de cette propriété que chacun d'eux est la somme des carrés de deux nom-

bres entiers, le produit nn' de ces nombres sera également la somme des carrés de deux nombres entiers.

Physique (12 juillet).

1°. Qu'est-ce que la chaleur latente?

2°. Faire connaître et discuter les principaux procédés employés pour distiller les liquides.

3°. On demande quel doit être le rayon d'un ballon sphérique formé d'un taffetas qui pèse 250 grammes le mètre carré, pour que plein d'hydrogène à 20 degrés et à la pression de $0^{m},75$ il ait une force ascensionnelle nulle, lorsqu'il se trouve dans l'air sec à même température et à même pression; le litre d'air à zéro et sous la pression de $0^{m},76$ pèse $0^{gr},293$ et le poids spécifique de l'hydrogène rapporté à l'air est 0,0693. On sait d'ailleurs que le coefficient de dilatation est 0,00367.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (14 juillet).

Mathématiques.

K étant un nombre donné et α un angle aussi donné, mais compris entre 0 et 180 degrés; g, G et h étant des inconnues auxiliaires liées par les relations

$$G \sin g = - \sin \alpha,$$

$$G \cos g = K \sin \alpha + \cos \alpha,$$

$$h = \frac{G \sin^2 \alpha}{K};$$

on demande les racines réelles de l'équation

$$h \sin^4 x - \sin (x - \alpha) = 0.$$

On donnera à G le même signe que K.

Note. Cette question n'a été comprise ni des élèves

ni même des professeurs *surveillants*, qui ont demandé vainement une autre question.

Chimie (15 juillet).

1°. Du chlore et de ses principaux composés.

Montrer quelles sont les analogies du brome et de l'iode, soit entre eux, soit avec le chlore.

2°. Analyse du gaz acide chlorhydrique.

Analyse du gaz acide sulfureux.

Analyse de l'acide phosphorique et détermination de l'équivalent du phosphore.

3°. Un kilogramme d'acide oxalique étant donné, combien obtiendra-t-on d'oxyde de carbone sec à 11 degrés et 0,758, en le traitant par l'acide sulfurique concentré?

On suppose l'expérience faite avec l'acide oxalique cristallisé du commerce.

Physique (16 juillet).

1°. Une éprouvette cylindrique à fond plat ayant à l'intérieur une longueur l est originairement pleine d'air sous la pression atmosphérique. On l'enfonce verticalement dans le mercure en ayant soin de tenir l'ouverture tournée vers le bas : il ne s'échappe point d'air. On demande à quelle pression le gaz intérieur sera soumis, lorsque le plan de l'ouverture se trouvera à une distance h du niveau du mercure dans le réservoir qui sert à l'expérience. On néglige les effets de la capillarité.

On examinera en particulier le cas où

$$l = 0^{m},2, \quad p = 0,76 \quad \text{et} \quad h = 1^{m}.$$

2°. Loi des attractions et répulsions électriques.

Démonstration expérimentale de ces lois.

Le produit de quatre nombres entiers en progression arithmétique ne saurait être le bicarré d'un nombre rationnel ;

PAR M. BERTON,
Employé au Ministère de la Marine.

Soient a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$ les quatre nombres proposés et P leur produit, on a

$$a(a+3h)=a^2+3ah,$$
$$(a+h)(a+2h)=a^2+3ah+2h^2,$$

d'où

$$P=(a^2+3ah+h^2)^2-h^4,$$

et faisant $P=p^4$,

$$p^4+h^4=(a^2+3ah+h^2)^2.$$

Mais, d'après un théorème connu (t. V, p. 71), la somme de deux bicarrés ne saurait être égale à un carré; donc l'équation ci-dessus est impossible dans les conditions de la question ; ainsi P ne saurait être égal à un bicarré.

Remarque. Si avec quatre nombres entiers en progression arithmétique on forme un quadrilatère inscriptible, la surface de ce quadrilatère ne saurait être exprimée par le carré d'un nombre rationnel.

En effet, la surface d'un tel quadrilatère a pour expression la racine carrée du produit de quatre facteurs entiers qui se trouvent en progression arithmétique.

Note du Rédacteur. Voir Chasles, *Aperçu historique : Géométrie des Indiens*, p. 417.

SUR UNE SURFACE ENGENDRÉE PAR DES NORMALES.

1. Soit

$$f = Py + Qx = 0$$

l'équation rendue homogène d'une surface; P et Q sont des fonctions entières de x, y, z, u, et les axes sont rectangulaires.

L'axe des z est sur la surface; car faisant

$$x = y = 0,$$

z reste indéterminé.

Soient x_1, y_1, z_1, u_1 les coordonnées d'un point de la surface, on aura

$$f_1 = P_1 y_1 + Q_1 x_1 = 0;$$

les indices indiquent des valeurs particulières.

L'équation du plan qui touche la surface au point désigné est

$$z\frac{df_1}{dz_1} + y\frac{df_1}{dy_1} + x\frac{df_1}{dx_1} + u\frac{df_1}{du_1} = 0.$$

Si le point de contact est sur l'axe des z, alors

$$x_1 = y_1 = 0,$$

et l'on a

$$\frac{df_1}{dz_1} = 0, \quad \frac{df_1}{dy_1} = P_1, \quad \frac{df_1}{dx_1} = Q_1, \quad \frac{df_1}{du_1} = 0.$$

Ainsi l'équation du plan tangent devient

$$P_1 y + Q_1 x = 0,$$

P_1 et Q_1 sont des fonctions de z_1 et u_1.

Les équations de la normale à la surface au même point $x_1 = y_1 = 0$ sont, les axes étant rectangulaires,

$$z = 0, \quad P_1 y - Q_1 x = 0.$$

Donc l'équation de la surface formée par toutes les normales à la surface partant de tous les points de z est

$$P_1 y - Q_1 x = 0.$$

Toutes ces normales sont parallèles au plan xy; c'est donc un conoïde de degré $r+1$, si r désigne la plus haute puissance de z dans P_1 et Q_1.

Si z ne monte qu'au premier degré dans P_1 et Q_1, le conoïde devient un paraboloïde hyperbolique. Ce théorème a été démontré par M. Chasles lorsque la surface donnée est réglée et de second degré (*Correspondance mathématique de Quételet*, p. 97, § 75, 1839).

Un paraboloïde hyperbolique donne un second paraboloïde hyperbolique, ce second produit un troisième rencontrant rectangulairement le second et est tangent au premier; de sorte que ce troisième reproduit le second et ainsi de suite.

SÉRIE DE TCHEBICHEF.

Bul. de l'Acad. de S.-Pétersbourg, t. XVII, n° 17, p. 29. Octobre 1858.

Soit

$$u = f(x),$$

fonctions affectées d'erreurs quelconques; M. Tchebichef trouve le développement par la méthode des *moindres carrés* (*).

(*) C'est la *véritable* méthode d'interpolation; elle tient compte des erreurs possibles dans les mesures. TM.

Faisons successivement

$$u_1 = f(h), \quad u_2 = f(2h), \ldots, \quad u_n = f(nh),$$

ces valeurs étant affectées d'erreurs égales.

u se développe suivant les dénominateurs de la fraction continue résultant du développement de l'expression

$$\frac{1}{x-h} + \frac{1}{x-2h} + \ldots + \frac{1}{x-nh}.$$

Ces dénominateurs s'expriment à un facteur constant près, et en prenant $\Delta x = h$ par

$$\Delta^l (x-h)(x-2h)\ldots(x-lh)(x-nh-2h)\ldots(x-nh-lh),$$

on a cette série

$$u = \frac{1}{n}\Sigma . u_i + \frac{3\Sigma i(n-i)\Delta u_i}{1^2.n.(n^2-1^2)h^2}\Delta(x-h)(x-nh-h)$$

$$+ 5\frac{\Sigma i(i+1)(n-i)(n-i-1)\Delta^2 u_i}{1^2.2^2.n.(n^2-1^2)(n^2-2^2)h^4}$$

$$\Delta^2(x-h)(x-2h)(x-nh-h)(x-nh-2h)$$

$$+ 7\frac{\Sigma i(i+1)(i+2)(n-1)(n-i-1)(n-i-2)\Delta^3 u_i}{1^2\,2^2.3^2.n.(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)h^6}$$

$$\Delta^3(x-h)(x-2h)(x-3h)(x-nh-h)(x-nh+2h)(x-nh-3h)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les signes Σ s'étendent de $i=1$ à $i=n$.

Désignant les fonctions

$$\Delta(x-h)(x-nh-h), \quad \Delta^2(x-h), \ldots, \quad \Delta^3$$

par Δ^1, Δ^2, Δ^3, etc., on a

$$\Delta^l = (2l-1)h(2x-nh-h)\Delta^{l-1}$$
$$-(l-1)^2[n^2-(l-1)^2]h^4\Delta^{l-2};$$

d'où l'on tire

$$\Delta^1 = h(2x - nh - h),$$

$$\Delta^2 = 3h^2(2x - nh - h)^2 - (n^2 - 1)h^4,$$

$$\Delta^3 = 15h^3(2x - nh - h)^3 - 3(3n^2 - 7)h^5(2x - nh - k)$$

$$\Delta^4 = 105h^4(2x - nh - h)^4 - 30(3n^2 - 13)h^6(2x - nh - h)^2 + 9(n^2 - 1)(n^2 - 9)h^8,$$

$$\Delta^5 = 945h^5(2x - nh - h)^5 - 1050(n^2 - 7)h^7(2x - nh - h)^3 + 15(15n^4 - 230n^2 + 407)h^9(2x - nh - h).$$

Le développement en fraction continue de l'expression

$$\frac{1}{x+h} + \frac{1}{x-2h} + \frac{1}{x-3h} + \ldots + \frac{1}{x+nh}$$

devient

$$\cfrac{2n}{2x - n - h - \cfrac{1^2(n^2 - 1^2)h^2}{3(2x - nh - h) - \cfrac{2^2(n^2 - 2^2)h^2}{5(2x - nh - h) - \cfrac{3^2(n^2 - 3^2)h^2}{7(2x - nh - h)}}}}.$$

NOTE SUR LES SÉRIES DIVERGENTES;

PAR M. E. CATALAN.

I. En rédigeant, l'année dernière, un *Traité élémentaire des séries*, je remarquai cette proposition très-simple, qui infirme la plupart des théories imprimées et enseignées :

La somme d'un nombre indéfiniment grand (*) *de*

(**) *Indéfiniment grand* signifie ici : *qui croît indéfiniment*.

termes consécutifs peut avoir pour limite zéro, sans que la série soit convergente.

Pour vérifier ce théorème, il suffit de considérer la série *divergente*

$$\frac{1}{2\,l2}+\frac{1}{3\,l3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\,l(n+1)}+\ldots,$$

et de prendre la somme des n termes qui suivent le $n^{ième}$. On obtient ainsi

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{(n+2)\,l(n+2)}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\,l(2n+1)}.$$

Tous les termes du second membre sont moindres que $\frac{1}{n\,ln}$; donc

$$S_{2n}-S_n<\frac{1}{ln},$$

et, conséquemment,

$$\lim(S_{2n}-S_n)=0.$$

II. Si, dans une série divergente, la somme d'un nombre indéfiniment grand de termes a quelquefois pour limite zéro, *cette somme peut*, à plus forte raison, *tendre vers une limite finie*, s'il existe, entre le nombre n de ces termes et le rang a du premier d'entre eux, une relation convenablement choisie. Par exemple,

$$(1)\qquad \lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=l2.$$

Cette formule (1) est devenue la *question* 458. Généralement, les solutions m'ont paru, ou inexactes, ou trop compliquées : j'espère que la démonstration suivante sera jugée simple et rigoureuse :

III. Théorème (évident au moyen d'une figure). *Soit*

f(x) *une fonction positive et indéfiniment décroissante, du moins à partir de* x = a − 1; *soit* F(x) *la fonction primitive de* f(x). *On a*

$$(2)\quad \begin{cases} f(a)+f(a+1)+f(a+2)+\ldots+f(a+n-1) \\ > F(a+n)-F(a), \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} f(a)+f(a+1)+\ldots+f(a+n-1) \\ < F(a+n)-F(a)-f(a+n)+f(a). \end{cases}$$

IV. Corollaire. *Si le nombre entier* n *est une fonction donnée du nombre entier* a, *qui devienne infinie en même temps que* a, *et si la différence* F(a + n) − F(a) *tend vers une limite* λ *lorsque* a *croît indéfiniment,*

$$\lim[f(a)+f(a+1)+\ldots+f(a+n-1)]=\lambda.$$

V. Applications. 1°. Soient

$$f(a)=\frac{1}{a};\quad n=(p-1)a+q,$$

p et q étant deux nombres entiers donnés. On aura

$$F(a)=la+C,$$

$$F(a+n)-F(a)=l\left(p+\frac{q}{a}\right),\quad \lambda=lp;$$

donc,

$$(4)\quad \lim\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{pa+q-1}\right]=lp.$$

En particulier,

$$(1)\quad \lim\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{2a-1}\right]=l2.$$

2°. Soient

$$f(a)=\frac{1}{a\,la},\quad n=a^2;$$

d'où

$$F(a) = lla + C,$$

$$F(a+n) - F(a) = l\,\frac{l(a+a^2)}{la} = l\,\frac{la^2 + l\left(1+\frac{1}{a}\right)}{la};$$

puis $\lambda = l2$ et

$$\lim \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a\,la} + \dfrac{1}{(a+1)\,l(a+1)} + \ldots \\ + \dfrac{1}{(a^2+a-1)\,l(a^2+a-1)} \end{array} \right] = l2.$$

3°. Soient, enfin,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad a = b^2, \quad n = 2b + 1,$$

b étant un nombre entier.

Ces hypothèses donnent

$$F(x) = 2\sqrt{x} + C, \quad F(a+n) - F(a) = 2;$$

donc

$$\lim \left[\frac{1}{\sqrt{b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{b^2+2b}} \right] = 2.$$

VI. *Remarque*. A cause des inégalités (2), (3), on a

$$\frac{1}{\sqrt{b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{b^2+2b}} > 2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{b^2+2b}} < 2 + \frac{1}{b(b+1)};$$

ce qui est assez curieux.

SOLUTION DE LA QUESTION 435

(voir t. XVII, p. 186);

PAR M. LOUIS CREMONA.
Professeur à Cremone.

Sur les longueurs OA, OB, OC données dans l'espace, on prend respectivement les points a, b, c; les rapports Aa, Bb, Cc sont donnés. Trouver : 1° l'enveloppe du plan abc; 2° le lieu du centre de gravité du triangle abc.

D'après l'énoncé, les droites OA, OB, OC sont divisées en parties proportionnelles ou *semblablement*, et a, b, c sont des points homologues de ces divisions. Si l'on demande l'enveloppe du plan abc, la question est un cas particulier de la suivante :

Trois divisions homographiques étant données sur trois droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, on demande l'enveloppe du plan de trois points homologues.

On trouve ce problème avec son corrélatif parmi les questions proposées (p. 298) dans l'ouvrage capital de M. Steiner : *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (*). Berlin, 1832.

La question corrélative est résolue par le théorème suivant de M. Chasles :

Si trois droites données dans l'espace sont les axes de trois faisceaux homographiques de plans, le lieu du point commun à trois plans homologues est une *cubique gauche* (**) (courbe à double courbure du troisième ordre

---

(*) On n'a publié que la première partie de cette admirable production; quand l'auteur nous donnera-t-il les autres? C.

(**) Locution italienne très-expressive que nous conservons. TM.

et de troisième classe) qui a deux de ses points sur chacune des droites données.

De là on tire, par le principe de dualité :

Si trois droites données dans l'espace sont divisées homographiquement, l'enveloppe du plan de trois points homologues est une surface développable de la troisième classe (et du quatrième ordre) qui a deux de ses plans tangents passant par chaque droite donnée ; ou bien, ce qui est la même chose, le plan de trois points homologues est osculateur d'une cubique gauche qui a deux de ses plans osculateurs passant par chaque droite donnée.

Dans le cas particulier qui constitue la question 435, les divisions homographiques données sont semblables ; donc les points à l'infini des droites OA, OB, OC sont homologues ; par conséquent le plan *abc* enveloppe une surface développable de la troisième classe (et du quatrième ordre) qui a un plan tangent à l'infini ; ou bien le plan *abc* est osculateur d'une cubique gauche qui a un plan osculateur à l'infini. Les plans OBC, OCA, OAB, ABC sont osculateurs de la même courbe.

On résout la question avec facilité aussi par le calcul. Posons

$$\mathrm{OA}=a, \quad \mathrm{OB}=b, \quad \mathrm{OC}=c,$$
$$\mathrm{O}a=p, \quad \mathrm{O}b=q, \quad \mathrm{O}c=r,$$

donc

$$\frac{p-a}{\lambda}=\frac{q-b}{\mu}=\frac{r-c}{\nu}=i,$$

i étant variable avec p, q, r ; λ, μ, ν constantes. Cela montre que p, q, r sont les coordonnées courantes d'une droite fixe rapportée aux axes OA, OB, OC.

Les coordonnées du centre de gravité du triangle *abc* sont

$$x=\frac{1}{3}(a+\lambda i), \quad y=\frac{1}{3}(b+\mu i), \quad z=\frac{1}{3}(c+\nu i);$$

donc le lieu du centre est la droite

$$\frac{3x-a}{\lambda}=\frac{3y-b}{\mu}=\frac{3z-c}{\nu},$$

qui est parallèle à la droite fixe menée ci-dessus.

Le plan *abc* a pour équation

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1,$$

ou bien

$$\frac{x}{a+\lambda i}+\frac{y}{b+\mu i}+\frac{z}{c+\nu i}=1.$$

Si dans cette équation on fait disparaître les dénominateurs, elle devient du troisième degré en i; donc le plan *abc* est osculateur d'une cubique gauche. Pour obtenir les équations de cette courbe, je dérive la dernière équation deux fois par rapport au paramètre i:

$$\frac{\lambda x}{(a+\lambda i)^2}+\frac{\mu y}{(b+\mu i)^2}+\frac{\nu z}{(c+\nu i)^2}=0,$$

$$\frac{\lambda^2 x}{(a+\lambda i)^3}+\frac{\mu^2 y}{(b+\mu i)^3}+\frac{\nu^2 z}{(c+\nu i)^3}=0.$$

De ces trois équations, on tire

$$x=-\frac{\mu\nu(a+\lambda i)^3}{(\nu a-\lambda c)(\lambda b-\mu a)},$$

$$y=-\frac{\nu\lambda(b+\mu i)^3}{(\lambda b-\mu a)(\mu c-\nu b)},$$

$$z=-\frac{\lambda\mu(c+\nu i)^3}{(\mu c+\nu b)(\nu a-\lambda c)},$$

équation de la cubique gauche qui est évidemment osculée par les plans

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Le plan à l'infini est aussi osculateur de la courbe, parce

que les valeurs trouvées de x, y, z ne contiennent pas le paramètre variable i en diviseur.

Les équations ci-dessus sont simples et symétriques; mais si l'on veut étudier la cubique gauche qui résout la question proposée, il est bien plus simple de faire usage de la représentation analytique de ces courbes, que j'ai donnée dans un Mémoire inséré dans les *Annali di Matematica pura e applicata* (Roma, 1858). Soient $x = 0$ le plan osculateur dans un point de la courbe qu'on prend pour origine; $y = 0$ le plan qui touche la courbe dans ce même point et la coupe à l'infini; $z = 0$ le plan qui coupe la courbe à l'origine et la touche à l'infini. Les équations de la courbe seront

$$x = ai^3, \quad y = bi^2, \quad z = ci,$$

a, b, c étant des constantes et i le paramètre variable. La droite $x = z = 0$ divise en deux parties égales les cordes de la courbe parallèles au plan $y = 0$. La courbe a un grand nombre de propriétés qu'il est bien facile de découvrir à l'aide des équations données ci-devant.

La circonstance que la cubique gauche, dont nous nous occupons étant osculée par le plan à l'infini constitue pour elle un caractère spécifique qui la distingue de toute autre espèce de courbe du même degré. Si l'on compare les cubiques gauches aux coniques planes, l'espèce particulière de cubique dont il s'agit correspond à la parabole, qui, comme on sait, est touchée par la droite à l'infini. Dans un petit Mémoire qui va être publié dans les *Annali di Matematica* j'ai classifié les cubiques gauches comme il suit (*) :

Premier genre. La courbe a trois asymptotes réelles;

(*) C'est une exposition analytique très-bien faite des belles études de M. Chasles sur les cubiques gauches. J'en ai fait la traduction, que je publierai le plus tôt possible. TM.

il n'y a pas de plans osculateurs parallèles; les plans osculateurs coupent la surface développable qu'ils enveloppent suivant des coniques qui sont toutes des hyperboles; les centres de ces hyperboles sont sur une ellipse. Le plan de cette ellipse rencontre la cubique en trois points réels et coupent les cônes du second degré qui passent par la cubique suivant des hyperboles.

Second genre. La cubique a une seule asymptote réelle et deux plans osculateurs parallèles entre eux qui coupent la surface développable (dont la courbe est l'arête de rebroussement) suivant deux paraboles; tous les autres plans osculateurs coupent la même surface suivant des ellipses ou des hyperboles. Les centres de ces coniques sont sur une hyperbole dont le plan est parallèle et équidistant aux deux plans osculateurs parallèles. Une branche de l'hyperbole focale contient les centres des ellipses; l'autre branche contient les centres des hyperboles. Les points de la cubique gauche auxquels correspondent des ellipses sont situés entre les plans osculateurs parallèles; les points auxquels correspondent des hyperboles sont au dehors. Le plan de l'hyperbole locale rencontre la cubique gauche dans un seul point réel et coupe les cônes du second degré qui passent par la courbe suivant des ellipses.

Tels sont les seuls cas absolument généraux que peuvent présenter les cubiques gauches. Mais il y a à considérer aussi deux cas particuliers, savoir :

1°. La courbe a une seule asymptote réelle à distance finie; les deux autres sont aussi réelles, mais elles coïncident à l'infini. C'est-à-dire : le plan à l'infini coupe la courbe dans un point et est tangent dans un autre. Les plans osculateurs coupent la développable suivant des hyperboles, à l'exception d'une seule qui est une parabole. Les autres de ces hyperboles sont sur une autre parabole. Les deux paraboles sont dans un même plan qui coupe les

cônes du second degré passant par la courbe suivant des paraboles.

2°. La courbe a toutes ses asymptotes qui coïncident à l'infini, savoir, elle est osculée par le plan à l'infini. Les plans osculateurs coupent la développable suivant des paraboles.

SOLUTION DE LA QUESTION 462

(voir p. 116);

PAR MM. PAUL DE CHAULIAC ET GEORGES PUGENS,
Élèves du collége Sainte-Marie, à Toulouse.

SABC étant un tétraèdre quelconque, désignons par V son volume, par α le dièdre dont l'arête est BC, par β celui dont l'arête est AS, par h, h', h'', h''' les hauteurs du tétraèdre qui partent respectivement des sommets S, A, B, C; et enfin par k la perpendiculaire abaissée du point S sur l'arête BC.

On a

$$\sin\alpha = \frac{h}{k} = \frac{h.\text{BC}}{k.\text{BC}} = \frac{h.\text{BC}}{2\,\text{surf SBC}} = \frac{hh'.\text{BC}}{6\text{V}},$$

et de même

$$\sin\beta = \frac{h''h'''.\text{AS}}{6\text{V}},$$

d'où l'on tire

$$\sin\alpha.\sin\beta = \frac{hh'h''h'''}{36\text{V}^2}.\text{BC}.\text{AS},$$

ou bien

$$\frac{\text{BC}.\text{AS}}{\sin\alpha.\sin\beta} = \frac{36\text{V}^2}{hh'h''h'''}.$$

Donc, ...

MM. de Chardonnel (de Châlons-sur-Marne), Édouard Mynard, élève du lycée Saint-Louis, donnent la même solution.

SOLUTION DE LA QUESTION 465

(voir t. XVIII, p. 117);

PAR M. A.-A. TERQUEM,
Élève du lycée Saint-Louis.

Solution. Je prends un des plans pour plan des xy; et l'arête pour axe des x et l'origine au point A. L'équation du premier plan est

$$z = 0;$$

soit

$$y = az$$

celle du second plan. Les équations d'une droite dans le plan xy sont

$$z = 0, \quad y = mx,$$

m étant le paramètre variable. Les équations de la droite perpendiculaire située dans le second plan sont

$$y = -\frac{1}{m}x, \quad y = az;$$

l'équation du plan qui passe par ces deux droites est

$$(1) \qquad mx - y + a(m^2 + 1)z = 0;$$

la dérivée par rapport à m est

$$(2) \qquad x + 2maz = 0;$$

éliminant m entre (1) et (2), on obtient

$$2azx^2 + 4a^2z^2y - az(x^2 + y^2) = 0,$$

et supprimant la solution $z = 0$,

$$x^2 + 4azy - y^2 = 0,$$

équation d'un cône ayant son sommet au centre.

L'équation de la normale au plan variable est

$$\frac{x}{m} = \frac{z}{a(m^2+1)} = -y;$$

éliminant m entre ces deux équations, nous aurons

$$ay(x^2+y^2)+zy^2=0,$$

ou, en supprimant le plan $y=0$, on a

$$a(x^2+y^2)+zy=0.$$

C'est aussi un cône rapporté au centre.

Nota. M. L. Brault (élève de l'Institution Barbet), prenant pour plans des coordonnées les plans bissecteurs des deux plans donnés, parvient aux mêmes résultats; au moyen d'une sphère, dont le centre est en A, on transforme le théorème en un autre relatif au triangle sphérique.

SOLUTION DE LA QUESTION 467

(voir p. 118);

PAR MM. PAUL DE CHAULIAC ET GEORGES PUGENS,
Élèves du collége Sainte-Marie, à Toulouse.

SABC étant un tétraèdre quelconque, soient h, h', h'', h''' les hauteurs qui partent respectivement des sommets S, A, B, C, et supposons que les deux premières se rencontrent.

Le plan P passant par h et h', est perpendiculaire sur les deux faces ABC, SBC; et, par conséquent, sur l'arête BC; d'où il suit que cette dernière droite est perpendiculaire sur l'arête SA (*), droite située dans le plan P.

(*) Deux droites non situées dans le même plan sont perpendiculaires l'une sur l'autre, lorsqu'en menant par un point de l'une une parallèle à l'autre, cette troisième droite fait avec la première un angle droit.

De plus, h'' et h''' étant respectivement perpendiculaires sur les faces SAC, SAB, le sont aussi sur SA, et, par conséquent, cette dernière droite est perpendiculaire à la fois aux deux plans déterminés par les deux couples de droites

$$(BC, h''), \quad (BC, h''');$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que ces plans se confondent. Donc, etc.

MM. Emile Françoise (élève du lycée de Caen) et G. V*** ont résolu la question de la même manière.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 469

(voir p. 118);

PAR MM. PAUL DE CHAULIAC ET MAURICE DE BOYSSON,
Élèves du collége Sainte-Marie, à Toulouse.

Le point E étant la projection du sommet A sur le côté BC, si l'on considère la distance DE comme positive ou négative, selon qu'en la parcourant à partir du point D, on va ou non dans le sens de B vers C; on sait qu'on a les égalités

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2.BD.DE,$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + 2.CD.DE,$$

d'où l'on tire, après avoir multiplié les deux membres de la première égalité par CD, et ceux de la seconde par BD,

$$\overline{AB}^2.CD + \overline{AC}^2.BD = \overline{AD}^2.BC + BC.CD.BD.$$

Donc, etc.

Scolie I. La question précédente peut être généralisée comme il suit:

Le point D étant supposé sur le côté BC ou sur son prolongement, si l'on considère les distances BD et CD comme positives ou négatives, selon qu'en les parcourant respectivement à partir des points B et C, on va ou non dans le sens de B vers C, on a la relation

$$\overline{AB}^2.CD - \overline{AC}^2.BD + \overline{AD}^2.BC = BC.CD.BD$$

La démonstration se fait toujours comme précédemment.

Scolie II. Le théorème précédent, qui renferme comme cas particulier la proposition XIV[e] du 3[e] livre de Legendre (3[e] édition de Blanchet), est dû à Stewart (*).

Ces deux scolies sont communiqués par MM. de Chauliac et de Boysson.

MM. Brault (élève de l'institution Barbet), Emile Françoise (élève du lycée de Caen) et G. V*** ont résolu la question de la même manière.

THÉORÈME

Sur le trapèze et sur le tronc de pyramide.

B et b longueur des bases, c longueur d'une parallèle aux bases menée par le centre de gravité et terminée aux côtés non parallèles; on a

$$c = \frac{2}{3}\frac{B^3 - b^3}{B^2 - b^2}.$$

Théorème analogue pour le tronc de pyramide.

$$c = \frac{3}{4}\frac{B^4 - b^4}{B^3 - b^3},$$

c, B, b sont des aires. (Prouhet.)

(*) Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, p. 175.

ARITHMOLOGIE.

Problème sur la puissance des nombres;

PAR M. BERTON,
Employé au Ministère de la Marine.

Trouver, parmi les puissances parfaites des nombres entiers, celles qui ont pour racines la somme des chiffres nécessaire à leur expression dans un système de numération donné.

Désignons par N^m une quelconque des puissances cherchées, et par $(p+1)$ le nombre de chiffres nécessaires à son expression dans le système de numération dont la base est B; nous aurons les deux équations

(1) $$N^m = aB^p + bB^{p-1} + \ldots + gB + h,$$

(2) $$N = a + b + \ldots + g + h.$$

Mais chacun des chiffres $a, b, \ldots, g, h$ étant au plus égal à $(B-1)$, nous pourrons poser

(3) $$N \leqq (B-1)(p+1).$$

Substituant dans l'équation (1), il viendra

$$(B-1)^m (p+1)^m \geqq aB^p + bB^{p-1} + \ldots + gB + h,$$

et, à fortiori,

$$B^m (p+1)^m > B^p,$$

d'où

$$(p+1)^m > B^{p-m}.$$

Appliquant les logarithmes en prenant B pour base du système, on obtient

(4) $$\log(p+1) > \frac{p-m}{m},$$

inégalité qui donne la limite supérieure du nombre de chiffres des puissances cherchées. Ce nombre p, une fois connu, devra être substitué dans l'équation (3), pour que l'on puisse déduire de cette relation la limite des racines qui doivent satisfaire à la condition énoncée. Si donc on désigne par N′ cette dernière limite, il suffira, pour résoudre le problème, d'élever successivement à la puissance donnée les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ N',$$

et de voir si, parmi les expressions de ces puissances, il y en a dont la somme des chiffres est égale à la racine qui leur correspond.

Dans le cas particulier de telle puissance ou de telle base données, on pourra abréger le nombre de ces essais en observant que si l'on retranche membre à membre les équations (1) et (2), la différence $N(N^{m-1} - 1)$ devra être divisible par $(B - 1)$.

Pour faire une première application, soient

$$B = 10 \quad \text{et} \quad m = 2.$$

La formule (4) donne

$$\log(p + 1) > \frac{p - 2}{2},$$

d'où

$$p < 4.$$

Donc, s'il existe, dans le système décimal, des carrés dont la racine carrée est égale à la somme des chiffres de leur expression, ces carrés ne peuvent être composés au plus que de quatre chiffres, et 36 est la limite des racines carrées dont il s'agit, car l'équation (3) devient dans les conditions de la question

$$N \leqq 9(3 + 1) = 36.$$

Mais si l'on retranche membre à membre les équations (1)

et (2), on remarquera dans l'hypothèse que le produit $N(N-1)$ sera nécessairement divisible par 9, que par suite les racines carrées des nombres cherchés, ou ces racines diminuées d'une unité, devront être divisibles par 9, et qu'en définitive les seuls nombres qu'il y ait lieu d'élever au carré sont

$$1,\ 9,\ 10,\ 18,\ 19,\ 27,\ 28,\ 36.$$

Or ces nombres ont respectivement pour carrés

$$1,\ 81,\ 100,\ 324,\ 361,\ 729,\ 784,\ 1296,$$

et la somme des chiffres de ces carrés dans l'ordre donné est

$$1,\ 9,\ 1,\ 9,\ 10,\ 18,\ 19,\ 18.$$

Il n'y a donc, parmi tous les carrés exprimés dans le système décimal (en outre de l'unité) que le nombre 81 dont la somme des chiffres considérés comme représentant des unités simples soit égale à sa racine carrée.

Note. On peut généraliser ce résultat en disant que, dans un système de numération à base quelconque, la somme des chiffres du carré de la base diminuée de l'unité est toujours égale à la racine carrée de ce carré.

En effet, on a

$$(B-1)^2 = B(B-2)+1,$$

nombre dont la somme des chiffres est égale à

$$(B-2)+1 = (B-1).$$

Soit, pour seconde application,

$$m = 3 \quad \text{avec} \quad B = 10.$$

L'équation (4) donne

$$\log(p+1) > \left(\frac{p-3}{3}\right),$$

d'où

$$p < 6.$$

Donc s'il existe dans le système décimal des cubes dont la racine cubique est égale à la somme des chiffres de leur expression, ces cubes ne peuvent être composés, au plus, que de six chiffres, et 54 est la limite des racines cubiques dont il s'agit; car l'équation (3) devient, dans les conditions de la question,

$$N < 9(5+1) = 54.$$

Mais si l'on retranche membre à membre les équations (1) et (2), on remarquera dans l'hypothèse que le produit

$$N(N-1)(N+1)$$

et conséquemment l'un des trois facteurs N, (N — 1), (N + 1) devra être divisible par 9; que par suite les racines cubiques des nombres cherchés ou ces racines diminuées ou augmentées de l'unité devront être divisibles par 9, et qu'en définitive les seuls nombres qu'il y ait lieu d'élever au cube sont :

1,	8,	9,	10,	17,	18,	19,
	26,	27,	28,	35,	36,	37,
	44,	45,	46,	53,	54.	

Or le tableau suivant présente les cubes de ces nombres dans l'ordre donné, et, en dessous de chacun d'eux, entre parenthèses, la somme de leurs chiffres :

1	512	729	1000	4913	5832	6859
	(8)	(18)	(1)	(17)	(18)	(28)
	17576	19683	21952	42875	46656	50653
	(26)	(27)	(19)	(26)	(27)	(19)
	85184	91125	97336	148877	157464	
	(26)	(18)	(28)	(35)	(27)	

d'où l'on voit que, parmi tous les cubes exprimés dans le système décimal (en outre de l'unité), il n'y en a que

cinq dont la somme des chiffres soit égale à leur racine cubique.

Ces cubes et leurs racines sont

Cubes...........	512	4913	5832	17576	19683
Racines cubiques..	8	17	18	26	27

EXERCICE NUMÉRIQUE SUR LES CONIQUES.

Une conique qui passe par les cinq points (1, 2), (3, 5), (— 1, 4), (— 3, — 1), (— 4, 3), les premiers nombres étant des x et les seconds des y, a pour équation

$$79x^2 - 320xy + 301y^2 + 1101x - 1665y + 1586 = 0.$$

(SALMON, *Conics*, p. 211.)

NOTE

Sur la limite supérieure des racines négatives déduites de la formule aux différences de Newton ;

PAR M. VITASSE,
Professeur au lycée de Tours.

La formule de Newton permet de former un polynôme algébrique de degré m, quand on connaît pour une valeur particulière attribuée à la variable la valeur de sa fonction et de ses m différences. La voici :

$$f(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{\frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\ldots\left(\frac{x - x_0}{h} - m + 1\right)}{1.2.3\ldots m}\Delta^m y_0,$$

Supposons, pour fixer les idées, que m soit un nombre pair, et que le coefficient de la plus haute puissance de x soit positif. Dans ce cas, la différence de l'ordre m est positive, et si l'on se reporte à la manière dont on forme le tableau des différences, on verra que pour une valeur négative de x suffisamment grande, la différence de l'ordre $m - 1$ sera négative, celle de l'ordre $m - 2$ positive, celle de l'ordre $m - 3$ négative, etc., la différence première négative, et la valeur de la fonction positive (*).

Or si $+ x_0$ est la plus petite valeur absolue de la variable pour laquelle toutes ces conditions sont satisfaites, *cette valeur sera une limite supérieure des racines négatives*.

En effet, si dans la formule qui précède la valeur absolue de x est plus grande que x_0, $x - x_0$ sera négatif et aussi $\frac{x - x_0}{h}$; et comme Δy_0 est par hypothèse négatif, le produit $\left(\frac{x - x_0}{h}\right) \Delta y_0$ sera positif. Dans le troisième terme, les facteurs $\frac{x - x_0}{h}$, $\frac{x - x_0}{h} - 1$ seront négatifs, et comme $\Delta^2 y_0$ est positif, ce terme sera encore positif. Généralement, les termes contenant en facteur une différence d'ordre pair et positive, contenant aussi un nombre pair de facteurs tous négatifs, seront positifs; pour une raison analogue, les termes contenant en facteur une différence d'ordre impair seront aussi positifs. Donc $f(x)$ gardera une valeur positive pour toutes les valeurs négatives de x, qui sont en valeur absolue plus grandes que x_0; x_0 est donc une limite supérieure des racines négatives.

Si m était un nombre impair, on prouverait de la même manière que si pour x_0 la fonction et ses différences

(*) Car ces différences sont exprimées par des fonctions alternativement de degré pair et impair. TR.

de divers ordres sont alternativement négatives et positives, x_0 sera une limite supérieure des racines négatives.

Ainsi dans tous les cas, la plus petite valeur absolue de x, pour laquelle la fonction et ses différences auront des valeurs dont les signes sont alternés, sera une limite supérieure des racines négatives.

Si l'on applique cette remarque à l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0,$$

on trouve que $x = -4$ est la limite dont il s'agit. La racine négative est en effet comprise entre -3 et -4. (*Algèbre* de Bertrand, p. 377.)

CONIQUE DONNÉE PAR DES POINTS OU DES TANGENTES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

PROBLÈME. *Trouver quelle est l'*espèce *de la section conique qui est déterminée par cinq conditions données* (points ou droites).

I. Je supposerai que les cinq conditions sont cinq points ou cinq tangentes, car tous les autres cas se ramènent aisément à ces deux-là. Par exemple, si les données sont trois points et deux tangentes, on cherchera les points de contact des deux tangentes et la question sera réduite à celle où l'on donne cinq points. Mais comme on a alors quatre coniques distinctes qui satisfont aux conditions proposées, il faudra déterminer l'espèce de chacune de ces quatre coniques.

II. Si les données sont les cinq points a, b, c, d, e, on mènera par le point a trois droites ac', ad', ae' parallèles respectivement aux droites bc, bd, be. Si les

rayons doubles des deux faisceaux homographiques (*) $a(c, d, e)$ et $a(c', d', e')$ sont réels et distincts, la conique est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces deux rayons. Dans ce cas, les rayons doubles peuvent être rectangulaires, et alors la conique est une hyperbole équilatère. Si ces rayons doubles sont coïncidents, la courbe a deux points confondus en un seul à l'infini; c'est donc une parabole. Enfin, s'ils sont imaginaires, la courbe est une ellipse. Dans ce dernier cas, les deux faisceaux peuvent être semblables (voir *Géom. sup.*, n° 145, p. 103), et la conique est un cercle.

Telle est, pour le cas des cinq points, la solution indiquée par M. Chasles dans sa *Géom. sup.*, n° 646, p. 458.

Celui où l'on donne cinq tangentes peut, ainsi qu'on va le voir, se résoudre avec la même facilité.

III. *On donne cinq tangentes de la conique dont on veut déterminer l'espèce.*

Soient Sc, Sc' deux des tangentes données; les trois autres marquent sur celles-ci deux divisions homographiques a, b, c et a', b', c'. Le point S étant considéré successivement comme appartenant à l'une et à l'autre de ces deux divisions, on cherchera ses homologues r et t; ce sont les points de contact des tangentes Sc, Sc' avec la courbe. On cherchera aussi les points I et J' qui correspondent, dans les deux divisions, respectivement, au point de l'autre qui est situé à l'infini. Si ces points sont eux-mêmes à l'infini, la courbe est une parabole. S'ils sont à distance finie, on achèvera le parallélogramme circonscrit SIS'J', dont le centre O est le centre même de la conique. Menant alors les droites Om et On parallèles respectivement à Sc et Sc', et joignant Or et Ot, on aura deux systèmes de diamètres conjugués, savoir Or, Om et

(*) Considérés comme homographiques. TH.

Ot, On. Les rayons doubles de l'involution déterminée par les deux angles mOr, nOt sont les asymptotes de la conique (*Géom. sup.*, n° 689, p. 485). Donc cette courbe sera une hyperbole ou une ellipse, suivant que ces rayons sont réels ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que les deux angles n'empiéteront pas ou bien empiéteront l'un sur l'autre. Si les deux angles sont droits, la conique est un cercle.

IV. *Autrement*. On ne déterminera que le point de contact r et le centre O. Puis on mènera, par les points a, b, c trois droites parallèles à rO, qui couperont Sc' en trois points α, β, γ. Les deux divisions de points a', b', c' et α, β, γ sont homographiques. On cherchera les points doubles de ces deux divisions. S'ils sont réels, c'est une preuve que la courbe a deux tangentes réelles parallèles au diamètre réel rO, et, par conséquent, c'est une ellipse. Mais si ces deux points sont imaginaires, ces tangentes sont imaginaires et la conique est une hyperbole.

Ainsi le problème est résolu.

SOLUTION DE LA QUESTION 463

(voir p. 116);

PAR M. L. BRAULT,
Élève de l'institution Barbet.

Soit l'équation

$$(1)\qquad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

si

$$(n-1)a_1^2 - (n+2)a_2 < 0;$$

l'équation a au moins un couple de racines imaginaires.

TOEPLITZ.

On sait que si

$$f(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles, les équations

$$f'(x)=0,\quad f''(x)=0,\ldots,$$

ont aussi leurs racines réelles. La dérivée de l'ordre $(n-2)$ du premier membre de l'équation (1), égalée à zéro, donne, en ôtant un facteur commun,

$$(2)\qquad n(n-1)x^2+2(n-1)a_1x+2a_2=0.$$

La condition de réalité des racines de cette équation est

$$(n-1)a_1^2-2na_2>0.$$

Or si l'on a

$$(n-1)a_1^2-(n+2)a_2<0,$$

on aura, à fortiori,

$$(n-1)a_1^2-2na_2<0,$$

et, dans ce cas, l'équation (2) ayant ses racines imaginaires, l'équation (1) aura au moins un couple de racines imaginaires.

Note du Rédacteur. $(n-1)a_1^2-2na_2$ est la somme des carrés de la différence des racines. Toute fonction symétrique dont chaque terme ne renferme que des exposants pairs, positifs ou négatifs, fournit un critérium lorsque cette fonction a une valeur négative.

M. Chabirand, élève de l'école préparatoire de Sainte-Barbe, donne la même solution que M. Brault.

SOLUTION DE LA QUESTION 468

(voir p. 118);

PAR UN PROFESSEUR.

La question 468 (Bourget, professeur à la Faculté de Clermont) rentre dans l'identité

$$1-\frac{A}{a}+\frac{A(A-a)}{a.b}-\frac{A(A-a)(A-b)}{a.b.c}+\ldots=0,$$

quand un des facteurs $A-a$, $A-b$, $A-c$, ... devient nul, ce qui doit avoir été remarqué il y a longtemps.

$$1-\frac{A}{a}=-\frac{A-a}{a},$$

somme des deux premiers termes;

$$\frac{A-a}{a}\left(\frac{A}{b}-1\right)=\frac{(A-a)(A-b)}{a.b},$$

somme des trois premiers termes;

$$\frac{(A-a)(A-b)}{a.b}\left(1-\frac{A}{c}\right)=-\frac{(A-a)(A-b)(A-c)}{a.b.c},$$

somme des quatre premiers termes;

$$\frac{(A-a)(A-b)(A-c)}{a.b.c}\left(\frac{A}{d}-1\right)$$
$$=\frac{(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)}{a.b.c.d},$$

somme des cinq premiers termes; et ainsi de suite.

CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1858),

Composition mathématique;

PAR M. LÉON BRAULT,
Élève de l'institution Barbet.

---

x, y, z désignant des coordonnées rectangulaires et m un paramètre variable, on demande de déterminer les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2(xy+xz+yz) = 2m^2-3m+1,$$

lorsque le paramètre m varie de $-\infty$ à $+\infty$.

L'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$\text{(A)} \left\{ \begin{array}{l} (x-y-z)^2+\dfrac{2}{m^2}(m^2y-z)^2+\dfrac{2}{m^2}(m^4-1)z^2 \\ = 2m^2-3m+1. \end{array} \right.$$

Les racines réelles de l'équation $(m^4-1)=0$ sont -1 et $+1$; celles de l'équation $2m^2-3m+1=0$ sont $\frac{1}{2}$, et 1.

Cela posé, en désignant par P, Q, R des polynômes du premier degré, et par k une constante, quand on fait varier m de $-\infty$ à $+\infty$, l'équation A prend successivement les formes suivantes :

1°. Pour $m=-\infty$,

$$y^2+z^2=1. \quad \text{(Cylindre droit de révolution.)}$$

2°. m variant de $-\infty$ à -1,

$$P^2+Q^2+R^2=k^2. \quad \text{(Ellipsoïdes.)}$$

3°. Pour $m = -1$,

$$P^2 + Q^2 = k^2. \quad \text{(Cylindre elliptique.)}$$

4°. m variant de -1 à $+\frac{1}{2}$,

$$P^2 + Q^2 - R^2 = k^2. \quad \text{(Hyperboloïdes à une nappe.)}$$

5°. Pour $m = \frac{1}{2}$,

$$P^2 + Q^2 - R^2 = 0. \quad \text{(Cône elliptique.)}$$

6°. m variant de $+\frac{1}{2}$ à -1,

$$P^2 + Q^2 - R^2 = -k^2. \quad \text{(Hyperboloïdes à deux nappes.)}$$

7°. Pour $m = 1$,

$$P^2 + Q^2 = 0. \quad \text{(Ligne droite.)}$$

8°. m variant de $+1$ à $+\infty$,

$$P^2 + Q^2 + R^2 = k^2. \quad \text{(Ellipsoïdes.)}$$

9°. Pour $m = +\infty$,

$$y^2 + z^2 = 1. \quad \text{(Cylindre droit de révolution.)}$$

Remarque. La forme de l'équation A permet de déterminer facilement, dans chaque cas particulier, un système de plans diamétraux conjugués, quand il en existe; et de déterminer aussi les systèmes de génératrices rectilignes que peuvent admettre les surfaces considérées.

Note du Rédacteur. Deux quelconques de ces surfaces (A) se coupent suivant une ligne dont la projection sur le plan des xy est un cercle; l'enveloppe de toutes ces surfaces est une surface du sixième degré.

Lorsque les dix coefficients de l'équation générale sont

fonctions d'un même paramètre, variant de $-\infty$ à $+\infty$, on ne peut guère déterminer les diverses surfaces, qu'en ayant recours aux formules de M. Painvin.

ÉQUATIONS D'UN CERCLE TOUCHANT DES DROITES
D'APRÈS M. CAYLEY.

1°. Equations des trois droites

$$A\,x + B\,y + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$
$$A''x + B''y + C'' = 0.$$

Équation du cercle touchant ces trois droites

$$\begin{vmatrix} \sqrt{Ax+By+C}, & \sqrt{A'x+B'y+C'}, & \sqrt{A''x+B''y+C''} \\ \sqrt{A+Bi}, & \sqrt{A'x+B'i}, & \sqrt{A''x+B''i} \\ \sqrt{A-Bi}, & \sqrt{A'-B'i}, & \sqrt{A''-B''i} \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Équations des trois droites

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \\ x\cos\beta + y\cos\beta - q = 0, \\ x\cos\gamma + y\cos\gamma - r = 0. \end{aligned}\right\} \text{axes rectang.}$$

Équation du cercle

$$\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sqrt{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p}$$

$$+\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sqrt{x\cos\beta + y\cos\beta - q}$$

$$+\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sqrt{x\cos\gamma + y\sin\gamma - r} = 0.$$

Posons

$$S = \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta),$$

on obtient pour équation du cercle, sous forme rationnelle,

$$\begin{aligned}
&+[Sx + p(\sin\beta - \sin\gamma) + q(\sin\gamma - \sin\alpha) + r(\sin\alpha - \sin\beta)]^2 \\
&+[Sy + p(\cos\beta - \cos\gamma) + q(\cos\gamma - \cos\alpha) + r(\cos\alpha - \cos\beta)]^2 \\
&-[p\sin(\beta-\gamma) + q\sin(\gamma-\alpha) + r\sin(\alpha-\beta)]^2 = 0.
\end{aligned}$$

3°. Équations de quatre droites

$$\begin{aligned}
A\,x + B\,y + C &= 0, \\
A'\,x + B'y + C' &= 0, \\
A''x + B''y + C'' &= 0, \\
A'''x + B'''y + C''' &= 0.
\end{aligned}$$

Équation de condition pour qu'un cercle touche ces quatre droites :

$$\begin{vmatrix}
A, & B, & C, & \sqrt{A^2 + B^2} \\
A', & B', & C', & \sqrt{A'^2 + B'^2} \\
A'', & B'', & C'', & \sqrt{A''^2 + B''} \\
A''', & B''', & C''', & \sqrt{A'''^2 + B'''^2}
\end{vmatrix} = 0.$$

SOLUTION DU PROBLÈME V

(voir Bulletin, p. 8);

Par M. Eugène DUPONT,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet).

Les quatre centres O, O', O'', O''' des cercles qui touchent trois côtés d'un triangle ABC étant réunis deux à

deux donnent six longueurs. Démontrer que les milieux I, P, K, N, H, M de ces longueurs sont sur la circonférence circonscrite au triangle.

Lemme. Si dans un triangle ABC on mène les trois hauteurs AG, BF, CE dont les pieds sont E, F, G et qui se rencontrent en un point O, et qu'on prenne les milieux H, K, I des distances du point O à chacun des sommets, les points E, F, G, H, K, I sont sur une même circonférence avec les milieux M, N, P des côtés du triangle ABC.

C'est le *cercle des six points*.

Or, le triangle O'O''O''' a ses côtés respectivement perpendiculaires aux bissectrices des angles du triangle proposé; car soit O'O''' l'un de ses côtés, cette ligne est bissectrice de l'angle supplémentaire de CAB; elle est donc perpendiculaire sur la bissectrice O''A de l'angle CAB.

Alors les points M, I, P, A, K, N, C, H, B se trouvent, d'après le lemme précédent, sur une même circonférence qui, passant aux points C, A et B, est la circonférence circonscrite au triangle ABC. C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 406

(voir t. XVI, p. 401);

PAR M. C. SOUILLART,
Ancien élève de l'École Normale.

Trouver l'équation du cercle qui coupe à angle droit trois cercles donnés.

1. Je cherche d'abord la relation qui doit exister entre les coefficients des équations de deux cercles pour que ces deux cercles se coupent à angle droit.

Soient

$$U = a(x^2 + y^2) + 2bxz + 2cyz + ez^2 = 0,$$
$$U_1 = a_1(x^2 + y^2) + 2b_1xz + 2c_1yz + e_1z^2 = 0$$

les équations de deux cercles rendus homogènes (en coordonnées rectangulaires).

Le centre du premier cercle a pour coordonnées $-\frac{b}{a}$, $-\frac{c}{a}$, et si l'on désigne par r son rayon, on a

$$\frac{e}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - r^2.$$

De même pour le deuxième cercle, les coordonnées du centre sont $-\frac{b_1}{a_1}$, $-\frac{c_1}{a_1}$, et si r_1 est son rayon, on a

$$\frac{e_1}{a_1} = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{a_1}\right)^2 - r_1^2.$$

J'exprime que la distance des centres est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit les rayons des deux cercles. Il vient

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{b_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{c_1}{a_1}\right)^2 = r^2 + r_1^2,$$

ce qui donne, en éliminant les rayons,

$$\frac{e}{a} + \frac{e_1}{a_1} - 2\frac{b}{a}\frac{b_1}{a_1} - 2\frac{c}{a}\frac{c_1}{a_1} = 0,$$

ou bien

$$ae_1 - 2bb_1 - 2cc_1 + ea_1 = 0:$$

c'est la relation cherchée.

2. Soient maintenant

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

les équations des trois cercles, et soit

$$U = 0$$

l'équation inconnue du cercle qui les coupe à angle droit. Je suppose que ces équations aient la forme indiquée plus haut, chaque coefficient faisant connaître par son indice le cercle auquel il se rapporte, et les coefficients sans indices appartenant au cercle inconnu. On aura, entre les coefficients a, b, c, e les trois équations

$$ae_1 - 2bb_1 - 2cc_1 + ea_1 = 0,$$

$$ae_2 - 2bb_2 - 2cc_2 + ea_2 = 0,$$

$$ae_3 - 2bb_3 - 2cc_3 + ea_3 = 0.$$

Entre ces trois équations et l'équation $U = 0$ où

$$a(x^2 + y^2) + 2bxz + 2cyz + ez^2 = 0,$$

il faut éliminer a, b, c, e. On sait que le résultat sera

$$\begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & a_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & a_3 \\ x^2 + y^2 & -xz & -yz & z^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation cherchée. Si on la transforme, en multipliant par x, y ou z les éléments des diverses colonnes et ajoutant aux éléments d'une colonne les éléments d'une autre ou de deux autres, on obtient

$$\begin{vmatrix} e_1 z + b_1 x + c_1 y & b_1 z + a_1 x & c_1 z + a_1 y & a_1 \\ e_2 z + b_2 x + c_2 y & b_2 z + a_2 x & c_2 z + a_2 y & a_2 \\ e_3 z + b_3 x + c_3 y & b_3 z + a_3 x & c_3 z + a_3 y & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dz} & \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & a_1 \\ \frac{dU_2}{dz} & \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & a_2 \\ \frac{dU_3}{dz} & \frac{dU_3}{dz} & \frac{dU_3}{dz} & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{vmatrix} = 0;$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque I. En transformant le déterminant, on a introduit le facteur z^3 à tous les termes de l'équation, puis supprimant le facteur z^2, il reste le facteur commun z.

Remarque II. Si l'on considère la tangente menée au point $\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}\right)$ du premier cercle et les tangentes aux points $\left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right)$ et $\left(\frac{x_3}{z_3}, \frac{y_3}{z_3}\right)$ du deuxième et du troisième cercle, la condition pour que ces trois droites se coupent au même point est, comme on le voit aisément,

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx_1} & \frac{dU_1}{dy_1} & \frac{dU_1}{dz_1} \\ \frac{dU_2}{dx_2} & \frac{dU_2}{dy_2} & \frac{dU_2}{dz_2} \\ \frac{dU_3}{dx_3} & \frac{dU_3}{dy_3} & \frac{dU_3}{dz_3} \end{vmatrix} = 0,$$

équation tout à fait analogue à celle qu'on doit trouver, et dont on pourrait peut-être tirer parti pour résoudre la question proposée.

La solution qui précède suppose que les axes des coordonnées soient rectangulaires : mais il a été démontré par M. G. Salmon (t. XVII, p. 95) que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix}$$

est un *covariant* des trois courbes U_1, U_2, U_3 : en l'égalant à zéro, on a donc toujours la même courbe, quels que soient les axes.

L'équation du cercle orthotomique à trois cercles donnés a été mise par M. Brioschi (t. XV, p. 463) sous une autre forme remarquable qu'on peut déduire de la précédente.

Soit

$$\lambda = 0$$

l'équation de la polaire de l'origine des coordonnées par rapport au cercle U; on a

$$\lambda = \frac{dU_1}{dz}.$$

Soit

$$l = 0$$

l'équation de la droite qui joint les centres des cercles U_2, U_3; les coordonnées de ces deux centres sont respectivement $-\frac{b_2}{a_2}$, $-\frac{c_2}{a_2}$ et $-\frac{b_3}{a_3}$, $-\frac{c_3}{a_3}$; donc la ligne des cen-

tres a pour équation

$$\begin{vmatrix} -\frac{b_2}{a_2} & -\frac{c_2}{a_2} & 1 \\ -\frac{b_3}{a_3} & -\frac{c_3}{a_3} & 1 \\ \frac{x}{z} & \frac{y}{z} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \\ -x & -y & z \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} \end{vmatrix} = 0;$$

donc

$$l = \begin{vmatrix} \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} \end{vmatrix}$$

par suite

$$l\lambda = \frac{dU_1}{dz} \begin{vmatrix} \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} \end{vmatrix}$$

Soient de même

$$\mu = 0, \quad \nu = 0$$

les équations des polaires de l'origine par rapport aux cercles U_2 et U_3, et

$$m = 0, \quad n = 0$$

les équations des droites qui joignent les centres des cer-

cles U_3 et U_1, U_1 et U_2; on aura évidemment

$$l\lambda + m\mu + n\nu = \begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix};$$

l'équation du cercle orthotomique prend donc la forme

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Note. MM. Richard Oxamendi, Cremona, professeur à Cremone, Ragonneau, capitaine d'artillerie, Joseph Martelli (de Milan) emploient à peu près les mêmes considérations jusqu'à la page 227.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 406 (G. SALMON)

(voir p. 224);

PAR M. G. CHABIRAND,
Élève de l'institution Jauffret.

Soient

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0$$

les équations rendues homogènes de trois cercles; l'équation du cercle qui coupe les premiers à angle droit est donnée par la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Je représente par $X = o$ l'équation du cercle *cherché*; j'appelle $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$ les coordonnées de son centre; j'appelle de même $\frac{x_1}{z_1}$, $\frac{y_1}{z_1}$; $\frac{x_2}{z_2}$, $\frac{y_2}{z_2}$; $\frac{x_3}{z_3}$, $\frac{y_3}{z_3}$ les coordonnées des centres des trois cercles *donnés*.

On exprimera que les cercles $U_1 = o$, $X = o$ se coupent à angle droit, si l'on exprime que la polaire du centre de X par rapport à U_1 se confond avec la polaire du centre de U_1 par rapport à X.

Ces deux polaires ont pour équations

$$\xi \frac{dU_1}{dx} + \eta \frac{dU_1}{dy} + \zeta \frac{dU_1}{dz} = o,$$

$$x_1 \frac{dX}{dx} + y_1 \frac{dX}{dy} + z_1 \frac{dX}{dz} = o.$$

Développant chacune de ces équations et exprimant qu'elles représentent une même droite, on trouve

$$2\xi x_1 + 2\eta y_1 - \zeta(k_1 + \chi) = o,$$

k_1 et χ désignant ici, pour abréger, les termes indépendants de $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{\xi}{\zeta}$, $\frac{\eta}{\zeta}$ dans les équations

$$U_1 = o, \quad X = o.$$

Les cercles U_1, U_3 donnent semblablement

$$2\xi x_2 + 2\eta y_2 - \zeta(k_2 + \chi) = o,$$
$$2\xi x_3 + 2\eta y_3 - \zeta(k_3 + \chi) = o.$$

Au moyen de l'équation

$$X = o,$$

on peut éliminer χ successivement dans chacune de ces

trois équations, et alors elles deviennent

$$\xi \frac{dU_1}{dx} + \eta \frac{dU_1}{dy} + \zeta \frac{dU_1}{dz} = 0,$$

$$\xi \frac{dU_2}{dx} + \eta \frac{dU_2}{dy} + \zeta \frac{dU_2}{dz} = 0,$$

$$\xi \frac{dU_3}{dx} + \eta \frac{dU_3}{dy} + \zeta \frac{dU_3}{dz} = 0.$$

Pour obtenir l'équation cherchée, il ne reste plus qu'à éliminer ξ, η, ζ entre ces trois équations. Pour cela il suffit d'égaler le déterminant à o. La proposition se trouve donc démontrée.

M. Joseph Bonnet, élève de l'institution Mayer, donne à peu près la même solution.

SOLUTION DE LA QUESTION 467

(voir p. 118);

PAR MM. H. DE CHARDONNEL,
De Châlons-sur-Marne.

ET DARBOUX,
Élève du lycée de Nîmes (classe de M. Dupain).

Soient SABC le tétraèdre proposé, AE, BF les deux hauteurs qui se rencontrent, H leur point d'intersection. Le plan de ces deux hauteurs ABD, perpendiculaire aux faces SAC, SBC, sera perpendiculaire à leur commune intersection SC. Menons, par cette dernière ligne, un nouveau plan SGC perpendiculaire à AB, commune intersection de SAB avec ABC et perpendiculaire par conséquent à ces deux faces elles-mêmes. Il est évident que ce

plan contient les hauteurs SK, CI; donc ces lignes se rencontrent. C. Q. F. D.

Nota. La ligne GD, commune intersection des plans SGC, ADB, passe au point H comme troisième hauteur dans le triangle ADB. On voit, de plus, que le point L, intersection des deux dernières hauteurs, tombe toujours sur la ligne GD, GD, SK, CI étant les trois hauteurs du triangle SGC.

SOLUTION DE LA QUESTION 468

(voir page 116);

PAR M. ÉMILE FRANÇOISE,
Élève du lycée de Caen.

Faire voir que si p est un nombre entier positif quelconque, on a

$$o = 1^p - \frac{m^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p - 1^p)}{1^p.2^p} - \ldots.$$

(BOURGET.)

Je crois qu'il faut ainsi rectifier l'énoncé :

Si m est un nombre positif quelconque, on a

$$(1) \qquad o = 1^p - \frac{m^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p - 1^p)}{1^p.2^p} - \ldots,$$

quel que soit p.

Je désigne par S_n la somme des n premiers termes.

J'ai

$$S_2 = 1^p - \frac{m^p}{1^p} = -\frac{m^p - 1^p}{1^p} \quad \text{car} \quad 1^p = 1,$$

$$S_3 = -\frac{m^p - 1^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p - 1^p)}{1^p.2^p} = \frac{(m^p - 1^p)(m^p - 2^p)}{1^p.2^p},$$

en général

$$S_{n+1} = \pm \frac{(m^p - 1)^p (m^p - 2^p) \ldots (m^p - n^p)}{1^p . 2^p \ldots n^p}.$$

Si m est un nombre entier positif, la somme des $m+1$ premiers termes sera

$$S_{m+1} = \pm \frac{(m^p - 1^p)(m^p - 2^p) \ldots (m^p - m^p)}{1^p . 2^p \ldots m^p} = 0.$$

Les termes suivants seront tous nuls, parce qu'ils contiendront tous, le facteur $m^p - m^p$.

Donc le second membre de l'égalité (1) sera identiquement nul, quel que soit p. C. Q. F. D.

SUR LA SÉRIE DE SCHWAB;

Par J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

---

1. Dans une note ajoutée à un article de M. Farcy (*Nouvelles Annales*, t. III, p. 582), M. le Rédacteur s'exprime ainsi :

« Il serait intéressant de trouver la limite de la série » de Schwab par un moyen direct (p. 585). »

Cette limite se déduit du théorème suivant :

Soit une série illimitée

(A) $a_0, \ a_1, \ a_2, \ldots, \ a_{2n+2}, \ a_{3n+3},$

où le premier terme étant nul ou positif et le deuxième plus grand que le premier, chaque terme *impair* est moyen *arithmétique*, chaque terme *pair* est moyen *géométrique* entre les deux termes qui le précèdent immédiatement; les termes impairs forment une série croissante, les termes impairs une série décroissante.

Ces deux dernières séries ont une même limite qui est la limite de la série (A). Cette limite est égale au double de l'inverse du plus petit des arcs qui, dans une circonférence dont le rayon est $\frac{1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}$ sont sous-tendus par une corde égale à $\frac{2}{a_1}$. C'est ce que nous allons démontrer.

2. Les termes de la série (A) se déduisent des deux premiers au moyen des formules

$$\text{(B)} \qquad a_{2n+2} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n}}{2}, \quad a_{2n+3} = \sqrt{a_{2n+2}\, a_{2n+1}}.$$

3. Soit R le rayon d'une circonférence, U un arc de cette circonférence plus petit que le quadrant, R, U étant des quantités déterminées par

$$a_0 = \frac{1}{R} \cot\left(\frac{U}{R}\right), \quad a_1 = \frac{1}{R} \operatorname{coséc}\left(\frac{U}{R}\right).$$

En désignant par φ un angle compris entre o et $\frac{1}{2}\pi$, on a

$$a_0 = \frac{1}{R}\cot\varphi, \quad a_1 = \frac{1}{R}\operatorname{coséc}\varphi, \quad U = R\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{a_0}{a_1}; \quad \sin\varphi = \frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - a_0^2}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}.$$

4. Les formules (B) donnent de suite

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \cot\left(\frac{1}{2}\varphi\right), \quad a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} \operatorname{coséc}\left(\frac{1}{2}\varphi\right).$$

On en déduit d'abord par induction

$$(1) \qquad a_{2n} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2^n} \cot\left(\frac{1}{2^n}\varphi\right),$$

$$(2) \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2^n} \operatorname{coséc}\left(\frac{1}{2^n}\varphi\right),$$

formules dont la généralité est ensuite démontrée, en faisant voir au moyen des formules (B), que si elles sont vraies pour $n=\nu$, elles le sont également pour $n=\nu+1$.

Les formules (1) et (2) donnent

$$(3)\qquad a_{2n+1}-a_{2n}=\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\varphi\right).$$

5. Les formules (1), (2), (3) peuvent s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(4)\qquad a_{2n}=\frac{\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{U}{R}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{U}{R}\right)}\cdot\frac{1}{U},$$

$$(5)\qquad a_{2n+1}=\frac{\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{U}{R}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{U}{R}\right)}\cdot\frac{1}{U},$$

$$(6)\qquad a_{2n+1}-a_{2n}=\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{U}{R}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{U}{R}\right)\times\frac{1}{U}.$$

Sous cette forme, elles montrent que, en faisant tendre n vers l'infini, a_{2n} croît constamment, a_{2n+1} décroît constamment; $a_{2n+1}-a_{2n}$ décroît constamment et indéfiniment.

De plus la limite de la série (A) est $\frac{1}{U}$ ou $\frac{2}{2U}$.

Or $2U$ est le plus petit des arcs qui dans une circonférence de rayon $\frac{1}{\sqrt{a_1^2-a_0^2}}$ ont pour corde $R\times 2\sin\varphi$ ou $\frac{2}{a_1}$; ce qui démontre le théorème énoncé au commencement de cet article.

La série de Schwab se déduit de la série (A) en posant

$$a_0=0,\quad a_1=1,$$

on a

$$2U = \pi$$

et pour limite $\frac{2}{\pi}$.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA QUESTION 406 (SALMON)

(voir p. 224);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Étant données trois courbes planes A, B, C *de l'ordre m, trouver le lieu des points de contact des courbes d'ordre m, qui passant par les points d'intersection des courbes* A *et* B *touchent la troisième* C.

Une courbe passant par les intersections de A et B est de la forme $A + \lambda B = 0$, λ représentant une constante arbitraire. Soit x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées *trilitères* du point de contact de cette courbe avec $C = 0$, l'équation de la tangente à cette courbe en ce point est

$$(1) \qquad C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0,$$

x_1, x_2, x_3 désignant les coordonnées courantes, C_1, C_2, C_3 les dérivées de la fonction C par rapport à ces variables respectives, dérivées dans lesquelles on a mis x'_1, x'_2, x'_3 à la place des coordonnées x_1, x_2, x_3. La tangente à la courbe $A + \lambda B = 0$ en ce même point sera pareillement

$$(A_1 + \lambda B_1) x_1 + (A_2 + \lambda B_2) x_2 + (A_3 + \lambda B_3) x_3 = 0;$$

or, ces deux tangentes doivent être identiques; donc μ désignant une constante,

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1 + \lambda B_1 + \mu C_1 = 0, \\ A_2 + \lambda B_2 + \mu C_2 = 0, \\ A_3 + \lambda B_3 + \mu C_3 = 0; \end{cases}$$

éliminant λ et μ entre ces équations, le résultat

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

sera le lieu des points de contact des courbes du faisceau $A + \lambda B = 0$ avec la courbe C. La courbe que l'on obtient ainsi est de degré $3(m-1)$, par conséquent par les points d'intersection des courbes A et B, on peut en général mener $3(m-1)$ courbes qui touchent C.

La symétrie de l'équation (3) montre que, *si par les points d'intersection de deux quelconques des courbes* A, B, C *on mène les* $3(m-1)$ *courbes qui touchent la troisième, on obtiendra en tout* $9(m-1)$ *points de contact situés sur la courbe* (3) *d'ordre* $3(m-1)$.

On peut remarquer que la courbe (3) passe, 1° par les points doubles des courbes A, B, C; car les points doubles de la première, par exemple, sont déterminés par les équations $A_1 = A_2 = A_3 = 0$; 2° par les points doubles de toutes les courbes passant par les intersections de deux quelconques d'entre elles A et B. En effet, les points doubles de l'une de ces courbes $A + \lambda B = 0$ sont déterminés par les équations

$$A_1 + \lambda B_1 = 0,$$
$$A_2 + \lambda B_2 = 0,$$
$$A_3 + \lambda B_3 = 0;$$

si elles ont lieu simultanément, l'équation (3) est évidemment vérifiée, en observant qu'aux éléments de la première colonne d'un déterminant on peut ajouter respectivement ceux de la deuxième multipliés par λ; 3° la courbe (3) passe aussi par les points doubles des courbes $A + \lambda B + \mu C = 0$. Cela se voit comme précédemment.

On obtient encore la courbe (3) en cherchant :

1°. Le lieu des points qui ont le même axe harmonique relativement à la courbe C et à l'une de celles du faisceau $A+\lambda B$; car l'équation (1) est l'axe harmonique du point x'_1, x'_2, x'_3 relativement à la courbe C, etc. (*);

2°. Le lieu du point dont les axes harmoniques relatifs aux trois courbes A, B, C passent par un même point;

3°. Le lieu des points doubles des courbes représentées par l'équation $A+\lambda B+\mu C=0$, où λ et μ sont deux constantes arbitraires.

Lorsque $m=2$, on a ce théorème : *Étant données trois coniques, par les intersections de deux quelconques d'entre elles on peut mener trois coniques qui touchent la troisième; on obtient ainsi neuf points de contact situés sur une courbe du troisième degré. Cette courbe passe encore par neuf points déterminés; ce sont les points d'intersection des côtés et des diagonales des quadrilatères inscrits à la fois dans deux quelconques des coniques données.*

Lorsque les trois coniques ou plus généralement les courbes A, B, C passent par un même point, le lieu correspondant passera par ce point. Des cercles situés dans un même plan passent par deux mêmes points situés à l'infini : il résulte de là que si les coniques du théorème précédent deviennent des cercles, le lieu correspondant, qui est toujours du troisième degré, se décomposera en une droite située entièrement à l'infini et en une courbe du second degré qui doit être un cercle, puisque cette courbe doit passer par deux points déterminés situés à l'infini.

De là résulte ce théorème : *Trois cercles étant situés dans un même plan, on peut généralement tracer, par*

(*) *L'axe harmonique* est donné par le théorème de Maclaurin. Tm.

les intersections de deux d'entre eux, deux cercles qui touchent le troisième; on a ainsi six points de contact situés sur un même cercle. Ce cercle coupe orthogonalement les trois cercles donnés.

Cette dernière partie s'aperçoit facilement (*).

Il est donc démontré que si A, B, C représentent trois cercles, l'équation (3) sera le cercle qui les coupe orthogonalement.

Soit

$$(x_1 - \alpha x_3)^2 + (x_2 - \beta x_3)^2 = r^2 x_3^2$$

l'un de ces cercles A; on a des équations analogues pour les deux autres B et C; l'équation (3) devient

$$\begin{vmatrix} x_1 - \alpha\, x_3 & x_2 - \beta\, x_3 & -\alpha\, x_1 - \beta\, x_2 + x_3(\alpha_2 + \beta^2 - r^2) \\ x_1 - \alpha' x_3 & x_2 - \beta' x_3 & -\alpha' x_1 - \beta' x_2 + x_3(\alpha'^2 + \beta'^2 - r'^2) \\ x_1 - \alpha'' x_3 & x_2 - \beta'' x_3 & -\alpha'' x_1 - \beta'' x_2 + x_3(\alpha''^2 + \beta''^2 - r''^2) \end{vmatrix} = 0;$$

développant, on a

$$\sum [\alpha'' x_1 + \beta'' x_2 - x_3(\alpha''^2 + \beta''^2 - r''^2]$$

$$\times [x_1(\beta - \beta') + x_2(\alpha' - \alpha) + x_3(\alpha\beta' - \beta\alpha')] = 0\,(^{**});$$

le premier facteur est la polaire de l'origine relativement au cercle C; le second est la droite qui joint les centres des cercles A et B. Désignons par

$$a = b = c = 0$$

les équations des droites qui joignent les centres des cercles B et C, C et A, A et B, et par

$$a' = b' = c' = 0$$

(*) C'est à démontrer. Tm.

(**) On divise par le facteur x_3. Tm.

les polaires de l'origine relativement aux cercles A, B, C, l'équation (3) prendra la forme

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

(Brioschi, *voir* p. 230.)

On peut interpréter autrement l'équation du cercle orthogonal à trois autres; en effet, on ne changera pas le déterminant précédent en ajoutant aux éléments de la troisième colonne multipliés par x_3, ceux de la première et de la deuxième multipliés respectivement par x_1 et x_2. On a ainsi

$$\begin{vmatrix} x_1 - \alpha\, x_3 & x_2 - \beta\, x_3 & A \\ x_1 - \alpha'\, x_3 & x_2 - \beta'\, x_3 & B \\ x_1 - \alpha''\, x_3 & x_2 - \beta''\, x_3 & C \end{vmatrix} = 0.$$

Le point x_1, x_2, x_3 appartenant au cercle orthogonal, A sera le carré de la tangente menée de ce point au cercle A, de même B sera le carré de la tangente menée du même point au cercle B, etc., le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 - \alpha\, x_3 & x_2 - \beta\, x_3 \\ x_1 - \alpha'\, x_3 & x_2 - \beta'\, x_3 \end{vmatrix}$$

indique le double de l'aire du triangle qui a pour sommets le point (x_1, x_2, x_3) et les centres des cercles A et B.

Désignons donc par a, b, c les longueurs des tangentes menées d'un point du cercle orthogonal aux trois cercles A, B, C, par a', b', c' les aires des triangles ayant un de leurs sommets en ce point et les deux autres aux centres B et C, C et A, A et B. Pour tous les points du cercle orthogonal on aura la relation géométrique

$$a^2 . a' + b^2 . b' + c^2 . c' = 0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 461

(voir t. XVIII, p. 46);

PAR M. BOUTERG (DE CLERMONT).

Démontrer que la série

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\frac{1}{2.3\ldots(n+1)}+\frac{1}{3.4\ldots(n+2)}\cdots$$

est convergente et a pour limite

$$\frac{1}{(n-1).1.2.3\ldots n-1}.$$

Ce qui donne la formule

$$\frac{1}{A_n^n}+\frac{1}{A_n^{n+1}}+\frac{1}{A_n^{n+2}}+\ldots=\frac{1}{(n-1)\,A_{n-1}^{n-1}},$$

en désignant par A_n^{n+1} le nombre des arrangements de $n+1$ lettres n à n.

Lemme. On a identiquement

$$\frac{a}{b-c}=\frac{a}{b}+\frac{ac}{b(b-c)},$$

donc on peut poser la série des identités suivantes :

$$\frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n-1},$$

$$\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n+1-2}=\frac{1}{n+1}+\frac{1.2}{(n+1)(n+1-2)},$$

$$\frac{1.2}{(n+1)(n+1-2)} = \frac{1.2}{(n+1)(n+2-3)} = \frac{1.2}{(n+1)(n+2)}$$
$$+ \frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+2-3)},$$

....

$$\frac{1.2.3\ldots k-1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-2)(n+\overline{k-2}-\overline{k-1})}$$
$$= \frac{1.2.3\ldots(k-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-2)\left[n+\overline{k-1}-k\right]}$$
$$= \frac{1.2.3\ldots k-1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}$$
$$+ \frac{1.2.3\ldots k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)[n-1]}.$$

Ajoutons membre à membre toutes ces égalités, il vient

$$\frac{1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$
$$+ \frac{1.2.3\ldots k-1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)} + \mathrm{R},$$

R étant donné par la relation

$$\mathrm{R} = \frac{1.2.3\ldots k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)(n-1)}.$$

Je vais prouver que R tend vers zéro lorsque k augmente indéfiniment. Prenons une valeur de k déjà grande et supérieure au nombre n, dont la valeur est finie et déterminée. Posons

$$k = n + l,$$

l pouvant croître indéfiniment. Nous aurons

$$\mathrm{R} = \frac{1.2\ldots n(n+1)(n+2)\ldots(n+l)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+l)[k+1][k+2]\ldots[k+n-1](n-1)};$$

on aperçoit alors une réduction qui, effectuée, conduit à

$$R = \frac{1.2\ldots n}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)(n-1)};$$

d'où l'on voit que si k augmente indéfiniment, R tend vers zéro; donc on a

$$\frac{n}{n-1} = \lim\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right].$$

Théorème. La démonstration du théorème qui constitue la question n'offre plus de difficulté, car en nommant S la série, on a

$$S = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right].$$

La parenthèse est une série convergente, qui a pour limite $\frac{1}{n-1}$; donc enfin la série donnée est convergente et a pour limite

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}.$$

C. Q. F. D.

Note du Rédacteur.

M. Léon Brault, élève de l'Institution Barbet, remarque que

$$\frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \ldots$$

(Catalan, *Algèbre, Manuel des Candidats*, p. 62, et *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 257.)

En divisant les deux membres par $1.2.3\ldots n$, on obtient

$$\frac{1}{(n-1).1.2.3\ldots n-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \frac{1}{2.3.4\ldots n+1} + \ldots$$

M. Rouquet, régent au collége de Castres, remarque que

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{1^n}; \quad \frac{1}{n+1!} < \frac{1}{2^n}; \quad \frac{1.2}{n+2!} < \frac{1}{3^n};$$

or lorsque $n > 1$, la série $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$ est convergente; donc la série donnée est convergente.

M. Aubert, professeur, remarque que dans l'énoncé de la question, le résultat précédent conduit à la formule

$$\frac{1}{A_n} + \frac{1}{A_n^{n+1}} + \frac{1}{A_n^{n+2}} + \ldots = \frac{1}{(n-1)\,A_{n-1}^{n-1}},$$

dans laquelle A_n^{n+1} représente le nombre des arrangements de $(n+1)$ lettres n à n.

Il peut servir également à démontrer la suivante :

$$(2) \quad \frac{1}{C_n^n} + \frac{1}{C_n^{n+1}} + \frac{1}{C_n^{n+2}} + \ldots = n \cdot \frac{1}{(n-1)\,C_{n-1}^{n-1}}. \; (*)$$

C_n^{n+1} désigne le nombre des combinaisons de $(n+1)$ lettres n à n.

Il suffit, en effet, de multiplier chacun des termes de la série (1) par le facteur $1.2.3\ldots n$; elle devient alors

$$(3) \; \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n} + \frac{1.2.3\ldots n}{2.3.4\ldots(n+1)} + \frac{1.2.3\ldots n}{3.4.5\ldots(n+2)} + \ldots,$$

dont les termes sont respectivement égaux à ceux du premier membre de la formule (2).

Il est d'ailleurs évident, d'après ce qui précède, que la série (3) a pour limite

$$\frac{1.2.3\ldots n}{(n-1).1.2.3\ldots(n-1)} = n\,\frac{1}{(n-1)\,C_{n-1}^{n-1}},$$

(*) Ce que démontre également M. Puget, élève du lycée de Caen.

la limite de la série (1) permet encore d'obtenir très-simplement celle de la série

$$(4)\quad 1+\frac{1}{m+1}+\frac{1.2}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.2.3}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\ldots,$$

donnée parmi les Exercices du *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique*, de M. Catalan (p. 62), et *Nouvelles Annales* (t. XV, p. 257).

Il est facile de voir que la série (4) peut être mise sous la forme

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots m}+\frac{1.2.3\ldots m}{2.3\ldots m(m+1)} \\ &\qquad +\frac{1.2.3\ldots m}{3.4\ldots(m+1)(m+2)}+\ldots; \end{aligned} \right.$$

elle est alors identique avec la série (3), et par suite a pour limite $\frac{1}{m-1}$; résultat indiqué par M. Catalan.

L'identité des séries (2) et (4) et de leurs limites peut s'apercevoir à priori.

En adoptant pour toutes deux la même notation, la série (2) s'écrira

$$\frac{1}{C_m^m}+\frac{1}{C_m^{m+1}}+\frac{1}{C_m^{m+2}}+\ldots,$$

et la série (4),

$$\frac{1}{C_0^m}+\frac{1}{C_1^{m+1}}+\frac{1}{C_2^{m+2}}+\ldots.$$

Or, on sait que l'on a généralement

$$(6)\qquad \frac{1}{C_m^{m+p}}=\frac{1}{C_p^{m+p}};$$

d'où résulte l'identité des termes respectifs des deux séries.

Il faut convenir, toutefois, que $C_0^m = 1$. Convention conforme à ce qu'on déduit de la relation (6), en y faisant $p = 0$.

MM. Challiot, élève du Lycée de Versailles, Gérard, élève de l'école des Carmes, Émile Duclos, trouvent la limite aussi par décomposition, mais ne démontrent pas directement la convergence.

EXPRESSION MNÉMONIQUE DE L'AIRE DU TRIANGLE RECTILIGNE;

PAR M. JOSEPH SACCHI (DE MILAN).

Soient x_1, x_2, x_3 ou simplement x_r les côtés, a_r les hauteurs, m_r les médianes; b_r, b'_r les bissectrices conjuguées du triangle; A l'aire du triangle.

En posant $x_1 + x_2 + x_3 + = 2s$, $\dfrac{1}{b_r b'_r} = q_r$,

$$\sqrt{[s(s-x_1)(s-x_2)(s-x_3)]} = \varphi(x_r)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2 - x_1^4 - x_2^4 - x_3^4},$$

on a

$$\varphi(x_r) = A, \qquad \varphi\left(\frac{1}{a_r}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{A};$$

$$\varphi(m_r) = \frac{3}{4}A, \qquad \varphi(q_r) = q_1 q_2 q_3 A \sqrt{-1}.$$

L'imaginaire dans la dernière équation est seulement apparent, puisqu'il se trouve aussi comme facteur dans le premier membre.

SOLUTION DE LA QUESTION 471

(voir p. 170);

PAR M. CHABIRAND,
Élève de l'institution Sainte-Barbe.

La proposition est applicable à une surface quelconque du second degré.

En général, si par une conique on fait passer des surfaces du second ordre qui coupent un plan suivant des cercles, tous ces cercles ont pour axe radical commun l'intersection de leur plan avec le plan de la conique.

Pour le démontrer, je prendrai pour plan des xy le plan des cercles, pour plan des yz le plan de la conique et pour plan des zx un plan quelconque que je choisirai tel, qu'il rencontre le plan des xy suivant une perpendiculaire à l'axe des y.

Alors la conique a pour équations

$$x = 0, \quad f(y, z) = 0,$$

$f(y, z)$ désignant une fonction du second degré.

Toutes les surfaces du second degré menées par cette conique peuvent être représentées par l'équation

$$f(y, z) + x(ax + by + cz + d) = 0,$$

a, b, c, d étant des coefficients arbitraires dont deux peuvent être déterminés par la condition que la trace de la surface sur le plan des xy soit un cercle.

Or l'équation de cette ligne est de la forme

$$Ay^2 + bxy + ax^2 + Dy + dx + F = 0.$$

Cette équation devant représenter un cercle, on a

$$a = A, \quad b = 0.$$

Les cercles suivant lesquels le plan des xy est coupé par les surfaces du second degré menées par la conique considérée ont donc pour équation générale

$$y^2 + x^2 + Py + \lambda x + Q = 0,$$

P et Q étant des constantes et λ une indéterminée.

Il résulte immédiatement de cette équation que tous les cercles qu'elle représente ont pour axe radical commun l'axe des y, c'est-à-dire l'intersection du plan de la conique avec le plan des cercles.

Note. La question 479 est un double emploi ; elle a déjà été proposée (t. II, p. 327) et résolue par M. Mention (t. VI, p. 399).

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

Sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants.

1. Ces dénominations effrayent encore quelques personnes. Elles désignent des choses et ces choses sont les clefs de la nouvelle analyse et de la nouvelle géométrie. Dans ces nouvelles branches, on raisonne principalement sur des *formes ;* elles constituent une théorie de ces formes, une *morphologie.* Cette identification, pour ainsi dire, des formes géométriques et algébriques complète le système cartésien, donne une incommensurable extension, et ouvre à la science de l'espace des horizons inconnus. J'attache une telle importance à ces objets, que, dans leur exposition, je ne chercherai pas à éviter le reproche d'être minutieux et de me répéter. Mon unique but est d'être compris de tous. Je demande seulement qu'on veuille bien lire ; car j'avoue ne pas savoir écrire pour ceux

qui ne veulent pas lire. Nous donnons ces notions d'après le dernier ouvrage du Rév. G. Salmon. Comme on ne trouve plus d'éditeurs en France pour ce genre de productions mathématiques, j'essaye de les faire connaître par l'intermédiaire des *Nouvelles Annales*. Connaissez-vous un autre moyen?

I. *Polynômes et équations homogènes.*

2. Dans tout ce qui suit, nous ne nous occuperons que des polynômes entiers et homogènes relativement aux variables. En faisant passer tous les termes d'une équation dans le même membre, on obtient un polynôme égal à zéro. C'est sous cette forme que nous considérerons les équations.

3. Toute équation peut être rendue homogène par l'introduction d'une nouvelle quantité, de valeur quelconque.

Exemple. L'équation

$$ax + b = 0$$

n'est pas homogène; prenant pour inconnue $\frac{x}{y}$, elle se change en

$$ax + by = 0;$$

équation homogène.

De même

$$ax^2 + bx + c = 0$$

devient, par une telle transformation,

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

qui est homogène;

$$ax + by + cz + d = 0;$$

en remplaçant x, y, z par $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$, cette équation prend

la forme

$$ax + by + cz + du = 0;$$

$$ax^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f$$

devient

$$ax^2 + bxy + cx^2 + dyz + exz + fz^2,$$

en introduisant la nouvelle indéterminée z; et de même pour les polynômes de tous degrés et pour un nombre quelconque de variables.

II. *Notation et dénomination des polynômes.*

4. Soit

$$U = ax^2 + 2bxy + cx^2 = (a, b)(x, y)^2.$$

le trinôme U est dit *binaire* parce qu'il ne renferme que deux variables, et *quadratique* parce qu'il est du deuxième degré; on représente ce polynôme de la manière abrégée indiquée par le membre à droite.

Soit encore

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a, b, c, d)(x, y)^3,$$

U est un polynôme binaire et cubique.

$$U = x^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$
$$= (a, b, c, d, e)(x, y)^4$$

est un polynôme *binaire biquadratique*; et en général

$$U = ax^n + n_1 bx^{n-1}y + n_2 cx^{n-2}y^2 + n_3 dx^{n-3}y^3 + \ldots$$
$$= (a, b, c, d, \ldots)(x, y)^n,$$

n_p est un coefficient binomial.

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2cxz + 2fxy$$
$$= (a, b, c, d, e, f)(x, y)^2$$

est un polynôme ternaire quadratique.

En général, chaque terme d'un polynôme renferme le coefficient multiplié par le nombre polynomial qui convient à ce terme s'il s'agissait du développement d'une puissance. Par exemple, dans le polynôme ternaire cubique, le terme x^2y a pour coefficient numérique 3 et xyz a pour coefficient numérique 6. Il suffit pour connaître ces coefficients de développer $(x+y+z)^3$.

C'est M. Cayley qui a introduit cette notation et ces dénominations, et il nomme *quantic* un polynôme d'un nombre quelconque de variables.

III. *Transformation linéaire des polynômes; module.*

5. Soit

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c)(x, y)^2;$$

posons

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y.,$$

U prendra la forme

$$U_1 = AX^2 + 2Bxy + Cx^2 = (A, B, C)(x, y)^2:$$

cette transformation se nomme *linéaire*; $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ est le *module* de la transformation.

On a

$$A = a\alpha_1^2 + 2b\alpha_1\alpha_2 + c\alpha_2^2,$$
$$B = a\alpha_1\beta_1 + b[\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1] + c\alpha_2\beta_2,$$
$$C = a\beta_1^2 + 2b\beta_1\beta_2 + c\beta_2^2.$$

Soient, 1°.

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a, b, c, d)(x, y)^3,$$
$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y,$$

on aura

$$U_1 = AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3 = (A, B, C, D)(X, Y)^3,$$

ou

$$A = (a, b, c, d)(\alpha_1, \alpha_2)^3, \quad D = (a, b, c, d)(\beta_1, \beta_2)^3,$$

$$3B = \beta_1 \frac{dA}{d\alpha_1} + \beta_2 \frac{dA}{d\alpha_2}, \quad 3C = \alpha_1 \frac{dD_3}{d\beta_1} + \alpha_2 \frac{dD}{d\beta_2}.$$

2°.

$$U = (a, b, c, d, e, f)(x, y, z)^2;$$

écrivons

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z,$$
$$z = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z;$$

le module de cette transformation est le déterminant $[\alpha_1 \beta_2 \gamma_3]$; on aura

$$U_1 = (A, B, C, D, E, F)(X, Y)^3;$$

A, B, C, D, E, F sont des fonctions des coefficients a, b, c, d et des α, β, γ, que chacun peut calculer.

Invariants.

6.

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c)(x, y)^2,$$

par transformation linéaire on obtient

$$U_1 = AX^2 + 2BX + CY^2.$$

Soit $\varphi(a, b, c)$ une fonction quelconque des coefficients a, b, c de U;

et $\varphi(A, B, C)$ une fonction *semblable* des coefficients de U;

$\varphi(A, B, C)$ est une fonction *implicite* de a, b, c et de α, β, γ, puisque A, B, C sont des fonctions de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$; si la fonction φ est tellement choisie, que l'on ait $\varphi(A, B, C) = (\alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \beta_1)^p \varphi(a, b, c)$, où p est un nombre entier positif, alors $\varphi(a, b, c)$ est dit un *invariant de* l'expression U.

1er *Exemple*. Prenons

$$\varphi(a, b, c) = b^2 - ac,$$

alors

$$\varphi(A, B, C) = B^2 - AC;$$

faisant les substitutions (p. 252), on obtient

$$B^2 - AC = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 (b^2 - ac);$$

ainsi $b^2 - ac$ est un *invariant* de la fonction

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

et cet invariant est du second *ordre;* car le degré de chaque terme est 2.

2e *Exemple.*

$$U = (a, b, c, d, e)(x, y)^4;$$

prenons

$$\varphi(a, b, c, d, e) = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$\varphi(A, B, C, D, E) = AE - 4BD + 3C^2;$$

on aura, les substitutions faites,

$$AE - 4BD - 3C^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^4 (ae - 4bd + 3c^2);$$

ainsi $ae - 4bd + 3c^2$ est un invariant du *second* ordre de cette fonction U; on peut vérifier que

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$$

est un autre invariant de la même fonction et du *troisième* ordre.

3e *Exemple.*

$$U = (a, b, c, d, e, f)(x, y, z)^2$$

$$= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy,$$

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z,$$

$$y = \alpha_2 X \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z = \alpha_3 X \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous désignerons dorénavant les invariants par la lettre I;

ici on a

$$I = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2,$$

invariant du troisième ordre ; car

$$ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2$$
$$= [\alpha_1 \beta_2 \gamma_3]^3 (abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2).$$

Invariants d'un système de polynômes.

7. Soient deux polynômes

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$
$$U' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2;$$

transformons-les linéairement, on obtient

$$U_1 = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$
$$U_1' = A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2;$$

on a

$$AC' + CA' - 2BB' = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 (ac' + ca' - 2bb');$$

ainsi $ac' + ca' - 2bb'$ est un invariant de ce système U et U'. De même il y a des invariants pour un nombre quelconque de polynômes et de variables.

8. Dans la géométrie des courbes et des surfaces, on effectue principalement des transformations linéaires ; les invariants sont alors des fonctions des coefficients qui expriment des propriétés indépendantes du choix des axes. Par exemple, si dans le 3ᵉ exemple du § 6 on fait $I = 0$, cela exprime que la conique se réduit à un point ou à deux droites ; propriété indépendante du choix des axes. La transformation linéaire est la transformation *homologique* de M. Poncelet.

Il s'agit maintenant de résoudre ce problème : *Étant donné un* quantic, *trouver ses invariants*. Pour obtenir cette solution, il est nécessaire de connaître les *discriminants*.

(*La suite prochainement.*)

SUR UNE LIMITE SUPÉRIEURE
Du nombre des racines commensurables d'une équation ;

PAR M. GASTON DE MONTEBELLO,
Élève de l'école des Carmes (classe de M. Gerono).

Si après avoir substitué à x dans le premier membre d'une équation à coefficients entiers, $f(x) = 0$, n nombres consécutifs p, $p+1,\ldots, p+n-1$, on cherche la plus haute puissance à laquelle n entre comme facteur dans le produit $f(p)f(p+1)\ldots f(p+n-1)$, l'exposant de cette puissance est une limite supérieure du nombre des racines entières de l'équation proposée.

Supposons, pour fixer les idées, que l'équation admette trois racines entières a, b, c. On aura identiquement

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\varphi(x);$$

en substituant dans cette égalité les nombres p, $p+1,\ldots$, $p+n-1$, on a

$$f(p) = (p-a)(p-b)(p-c)\varphi(p),$$
$$f(p+1) = (p-a+1)(p-b+1)(p-c+1)\varphi(p+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(p+n-1) = (p-a+n-1)(p-b+n-1)(p-c+n-1).$$

Or chacune des suites de nombres entiers consécutifs de $p-a$ à $p-a+n-1$, de $p-b$ à $p-b+n-1$, de $p-c$ à $p-c+n-1$ contient un multiple de n, ce qui montre que le produit $f(p)f(p+1)\ldots f(p+n-1)$ renferme au moins trois fois le facteur n.

Remarquons que tout ce que nous venons de dire sur les racines entières s'applique également aux racines fractionnaires. Car si l'équation admet une racine frac-

tionaire $\frac{\alpha}{\beta}$ (α étant premier avec β), le premier membre est divisible par $(\beta x - \alpha)$, de sorte que le produit

$$f(p)f(p+1)\ldots f(p+n-1)$$

sera divisible par le produit

$$(\beta p - \alpha)[\beta(p+1)-\alpha]\ldots[\beta(p+n-1)-\alpha].$$

Or les n nombres qui entrent comme facteurs dans ce dernier produit forment une progression arithmétique dont la raison est β, et si n est premier avec β, on sait que l'un de ces nombres sera divisible par n. Il suffit donc, pour que l'on puisse appliquer la limite que nous avons indiquée au nombre des racines commensurables de l'équation, de prendre n premier avec tous les dénominateurs des racines fractionnaires irréductibles, et pour cela il suffit de choisir n premier avec le coefficient du premier terme de l'équation qui, comme on sait, est divisible par tous ces dénominateurs.

On conclut des théorèmes précédents que si la substitution de n nombres entiers consécutifs dans $f(x)$ ne donne aucun résultat divisible par n, l'équation

$$f(x) = 0$$

n'a aucune racine entière, et même aucune racine commensurable, si n est premier avec le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue.

SUR LES DIVISEURS COMMENSURABLES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. E. PROUHET.

Soit

$$f(x) = 0$$

une équation algébrique. Changeons x en $x+h$ et décomposons $f(x+h)$ en deux parties, l'une P_0 renfermant tous les termes de degré pair en x, l'autre P_1, tous les termes de degré impair. Soit enfin $Ax+B$ le reste du premier degré auquel on parvient quand on cherche le plus grand commun diviseur de P_0 et de P_1, A et B étant des fonctions de h. Cela posé, *l'équation*

$$f(x)=0$$

a autant de diviseurs commensurables du second degré qu'il y a de valeurs commensurables de h *satisfaisant aux deux équations*

$$A=0,\quad B=0.$$

SECTION DU TORE

Par un plan tangent à cette surface et passant par son centre ;

PAR UN PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Solution géométrique.

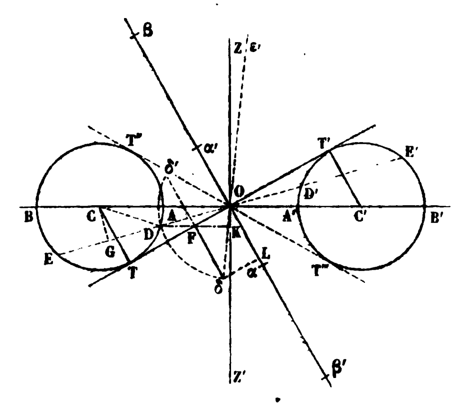
Cette section se compose de deux cercles égaux entre eux, égaux à celui que décrit le centre du cercle générateur, et passant par les points de contact du plan avec la surface.

Ce résultat curieux, indiqué pour la première fois par M. Yvon Villarceau (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 28 août 1848) (*), est très-facile à établir par l'analyse, qu'on fasse ou non usage des coordonnées polaires indiquées par M. Yvon Villarceau. Nous allons en

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 345.

donner une démonstration géométrique entièrement élémentaire.

Prenons pour plan de la figure le plan méridien perpendiculaire au plan tangent donné. Représentons par les



cercles dont CA et C′A′ sont les rayons, la section de la surface par ce plan méridien. La perpendiculaire ZZ′ à la droite CC′ en son milieu O sera l'axe de la surface. Soit TT′ la trace du plan tangent donné. Rabattons ce plan sur le plan de la figure autour de TT′.

Pour trouver des points de la section cherchée, nous couperons la figure par des plans auxiliaires perpendiculaires à l'axe ZZ′. Soit DK la trace de l'un de ces plans; élevant par le point F où elle rencontre TT′ une perpendiculaire à TT′ et décrivant un cercle de O comme centre avec OD comme rayon, les points de rencontre δ et δ' seront des points de la section rabattue. Le même plan auxiliaire nous en donnerait deux autres points, qu'il nous est inutile de considérer. Le plan auxiliaire passant par le centre nous donnera de même les quatre points α, α', β et β', situés sur la perpendiculaire élevée par O à TT′, et sur les cercles décrits de O comme centre avec OA et OB comme rayons.

Cela posé, je dis que le point δ appartient au cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre, lequel passe d'ailleurs par les points T et T', puisque l'on a

$$\overline{OT}^2 = OA.OB = O\alpha.O\beta.$$

Abaissons en effet la perpendiculaire CG sur OD; joignons CD et CT. Les triangles semblables ODK et OCG d'une part, OFK et COT d'autre part, donnent

$$\frac{OK}{OD} = \frac{CG}{OC} \quad \text{et} \quad \frac{OF}{OK} = \frac{OC}{CT};$$

d'où l'on déduit en multipliant membre à membre, et remplaçant CT par CD et OD par $O\delta$,

$$\frac{OF}{O\delta} = \frac{CG}{CD},$$

de sorte que les triangles CGD et $OF\delta$ sont semblables. Abaissant δL perpendiculairement sur $\alpha\beta$, on aura donc

$$F\delta \quad \text{ou} \quad OL = \frac{O\delta.DG}{CD} = \frac{OD.DG}{CD}.$$

Maintenant si l'on joint $\beta\delta$ et $\alpha\delta$, on aura

$$\overline{\beta\delta}^2 = \overline{O\beta}^2 + \overline{O\delta}^2 + 2O\beta.OL$$

et

$$\overline{\alpha\delta}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{O\delta}^2 - 2O\alpha.OL;$$

d'où

$$\overline{\beta\delta}^2 + \overline{O\alpha}^2 = \overline{O\alpha}^2 + \overline{O\beta}^2 + 2\left[\overline{O\delta}^2 + OL(O\delta - O\alpha)\right].$$

Mais

$$O\beta - O\alpha = OB - OA = AB = 2CD \quad \text{et} \quad 2DG = ED.$$

L'égalité précédente devient donc, en tenant compte de

la valeur de OL,

$$\overline{\beta\delta}^2 + \overline{\alpha\delta}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\,OD.OE$$
$$= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\,OA.OB = (OA+OB)^2 = \overline{AB}^2 = \overline{\alpha\beta}^2.$$

Le triangle $\alpha\delta\beta$ est donc rectangle, et δ est sur le cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. On en déduit immédiatement le théorème annoncé.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 443

(voir p. 77);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Capitaine de frégate (*).

LEMME I. *Les pieds des normales, abaissées d'un point fixe sur une conique, sont sur une hyperbole équilatère qui passe par le point fixe et par le centre* O *de la conique, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes principaux de cette courbe.* (Poncelet, *Traité des propriétés projectives.*)

Corollaire. Si le point P se meut sur une droite L, les hyperboles équilatères correspondantes à ses positions successives ont quatre points communs, et forment un *faisceau.* Car, indépendamment du centre O de la conique donnée et des deux points situés à l'infini sur leurs asymptotes parallèles, elles ont encore en commun le point d'intersection de la droite L par le diamètre de la conique conjugué à celui qui est perpendiculaire à cette droite.

(*) Chef d'état-major à bord de la canonnière *l'Éclair,* en croisière dans la mer Adriatique.

Remarque. Si la conique donnée est une parabole, l'une des asymptotes de chacune de ces hyperboles équilatères coïncide avec l'axe focal de la parabole. Donc l'un des quatre points communs à toutes les hyperboles qui forment le faisceau se trouve (à l'infini) sur la parabole elle-même.

LEMME II. *Quand un faisceau de coniques passant par quatre points fixes est coupé par une conique fixe, les cordes communes enveloppent une courbe de troisième classe, c'est-à-dire une courbe à laquelle on ne peut mener que trois tangentes par un point quelconque.* (Chasles, *Cours de la Sorbonne.*)

Remarque. Si l'un des quatre points communs aux coniques du faisceau se trouve sur la conique fixe, toute droite passant par ce point est tangente au lieu géométrique, qui, abstraction faite de ce point, se réduit ainsi à une conique.

PROBLÈME. *Quel est le lieu du point de rencontre des normales menées à une conique* C *par les deux points où une transversale, mobile autour d'un point* S, *coupe cette conique* (*)?

Solution. Il suffit de déterminer combien le lieu cherché a de points (réels ou imaginaires) sur une droite quelconque L.

Pour cela, supposons que, de chaque point de cette droite, on abaisse des normales sur la conique. D'après le *corollaire* du lemme I, leurs pieds seront sur une série d'hyperboles équilatères ayant quatre points communs. Donc le lieu cherché possède, sur L, autant de points

(*) Problème du grand Concours de cette année, et qu'une solution récente avait mis dans le domaine public. TM.

que ces hyperboles et la conique possèdent de cordes communes passant par le point donné S. Or ce nombre est trois, d'après le lemme II. Donc la courbe cherchée est du troisième ordre. Cette courbe passe évidemment par les quatre points où les normales abaissées du point S sur la conique donnée rencontrent cette courbe pour la seconde fois, et aussi par les centres de courbure des points de contact des tangentes issues du point S. Elle n'a qu'une asymptote réelle, dont la direction est perpendiculaire au diamètre conjugué de celui qui passe par le point S.

Corollaire I. Si la conique donnée est une parabole, le lieu géométrique est une conique, puisque la courbe de troisième classe du lemme II se réduit elle-même, dans ce cas, à une conique (*Remarque* du lemme II). On peut dire aussi que, si N est la normale à la parabole menée par le point où cette courbe est rencontrée par la parallèle à l'axe focal issue du point S, tous les points de cette normale font partie du lieu cherché. En effet, tous les diamètres de la parabole peuvent être regardés comme étant des normales menées par le point de cette courbe situé à l'infini, et par conséquent chaque point de N est un point d'intersection de deux normales relatives à une même transversale issue du point S. Donc la courbe du troisième ordre se réduit alors à une conique, si l'on fait abstraction de cette droite, qui constitue une de ses branches, et qui n'est autre chose que l'asymptote du cas général.

Corollaire II. Si le point S est sur l'un des deux axes principaux de la conique donnée, le lieu se réduit encore à une conique, parce que l'axe, sur lequel le point S se trouve, fait partie de la courbe. Et si le point S est le centre de la conique, cette courbe du troisième ordre se

compose de trois lignes droites, savoir : les deux axes principaux de la conique et la droite située à l'infini.

Observation. Le théorème n'est pas seulement vrai pour les normales, mais il l'est aussi pour des obliques faisant avec les tangentes à la conique un angle constant et dans le même sens de rotation.

Il est d'ailleurs susceptible d'une généralisation plus grande ; car la normale et la tangente sont deux droites conjuguées qui divisent harmoniquement l'angle sous lequel les foyers sont vus du point de contact. Faisant une déformation homographique de la figure, on a ce théorème :

Étant donnés une conique, deux points fixes F, F' *pris dans son intérieur, et un point quelconque* S, *si l'on mène une transversale* Sm *qui coupe la conique aux points* m, m', *puis par le point* m *la droite conjuguée harmonique de la tangente en ce point par rapport aux deux rayons* mF, mF', *et pareillement pour le point* m', *le lieu du point de rencontre de ces deux droites sera une courbe du troisième ordre.*

Et l'on a un théorème corrélatif dont l'énoncé, facile à former, prend une forme plus simple si l'on suppose située à l'infini l'une des deux droites qui correspondent corrélativement aux deux points F, F', c'est-à-dire aux foyers réels de la figure primitive (*).

(*) Quelle est la classe de ces courbes ? TM.

SOLUTION DE LA QUESTION 477

(voir page 171);

PAR M. JOSEPH VIGNE, DE TOULON.

Soient BE et BD les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle B, CF et CG les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle C, et soient E, D, F, G les projections respectives du sommet A sur ces droites.

Les deux droites BE et BD sont perpendiculaires l'une sur l'autre; de plus les angles ADB et AEB étant droits, la figure ADBE est un rectangle : il s'ensuit que le point M de rencontre de DE avec AB est le milieu de cette dernière droite et, en second lieu, que la droite DE est parallèle à BC: car les deux angles MEB, EBC sont tous les deux égaux à l'angle MBE. Par conséquent, la droite DE prolongée passe par le milieu de AC.

De même la figure AFCG étant un rectangle, la droite FG passe par le milieu de AC et elle est parallèle à BC. Elle se confond donc avec DE, c'est-à-dire que les quatre points D, F, E, G sont en ligne droite.

C. Q. F. D.

Note. M. Léon Vidal, élève du même lycée (classe de M. Huet), s'y prend ainsi : Soient O le centre du cercle inscrit et M le centre du cercle ex-inscrit qui touche le côté AB. Les quatre points M, O, A, B sont sur une même circonférence; et, d'après un théorème connu, les projections du point A sur les côtés du triangle inscrit BOM sont sur une droite; donc, etc.

M. l'abbé Poitrasson, en donnant la même solution, cite la *Géométrie supérieure*, n° 379, où l'on voit que le

triangle qui a pour sommets les trois centres des cercles ex-inscrits a pour hauteurs les trois bissectrices intérieures.

QUESTIONS.

480. Soit D_0 un cercle, D_1 une développante de D_0, D_2 une développante de D_1, . . ., D_n une développante de $D_{(n-1)}$. Appelons D_n *développante du cercle de l'ordre* n. Cela posé, on propose de démontrer le théorème suivant : Si une figure plane varie en restant semblable à elle-même, et si trois droites de cette figure ont chacune pour enveloppe une développante de cercle de l'ordre n, toute autre droite de la figure a pour enveloppe une développante de cercle du même ordre. (P. de Lafitte.)

481. On donne un hyperboloïde à une nappe engendré par la révolution d'une hyperbole équilatère ; un cône qui a son sommet sur cette surface et pour base le cercle de gorge est coupé suivant un cercle par un plan perpendiculaire au cercle de gorge. (O' Böklen.)

482. Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, le centre de l'hyperboloïde, passant par les quatre hauteurs, le centre de gravité du tétraèdre, sont trois points en ligne droite. (Joachimsthal.)

SUR LES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ;

Par M. Abel TRANSON.

Dans la note XX de son *Histoire des Méthodes en géométrie* (p. 348, 1837), M. Chasles fonde la double génération des courbes du troisième degré, soit par cinq paraboles

divergentes, soit par cinq courbes à centre, sur une propriété très-curieuse de leurs points d'inflexion, propriété qu'il ne démontre pas, mais qu'il annonce comme pouvant se déduire avec facilité de quelques considérations de géométrie.

On peut suivre une autre marche qui consiste à établir premièrement l'une ou l'autre des deux générations, puis à en déduire la propriété des points d'inflexion, et de là le second mode de génération.

Si l'on veut prouver, par exemple, le théorème de Newton que toutes les courbes du troisième ordre sont données par la perspective de cinq paraboles divergentes, il suffira de prouver que par la perspective on peut amener l'équation d'une quelconque de ces courbes à la forme

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

qui est la forme générale des paraboles divergentes. Or une courbe quelconque du troisième ordre a au moins un point d'inflexion, puisque l'équation qui donne les abscisses de ses points d'inflexion est du quinzième degré (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 294), et que d'ailleurs l'équation de la courbe a pu être choisie de telle sorte, qu'à une valeur réelle de l'abscisse correspondît au moins une valeur réelle de l'ordonnée.

D'après cela, faisons la perspective de la courbe proposée, de sorte que la tangente à son point d'inflexion passe tout entière à l'infini.

La courbe ainsi transformée a donc une asymptote à l'infini, et je dis qu'elle n'en a pas d'autre.

En effet, le point à l'infini d'une seconde asymptote, point qui appartiendrait à la courbe, pourrait être considéré comme appartenant aussi à la première asymptote; mais cela est impossible, puisque celle-ci a déjà trois points en commun avec la courbe.

Et ce peu de mots suffirait déjà pour prouver la transformation de toute courbe du troisième ordre en une courbe purement parabolique. Mais il importe pour notre objet actuel d'obtenir l'équation de la courbe transformée.

Supposons donc premièrement que l'axe des y soit pris dans la direction de cette asymptote unique qui est à l'infini. Puis, dans l'équation de la courbe transformée, remplaçons y par mx, et écrivons-la conformément aux notations convenues dans la théorie des asymptotes, sous cette forme

$$x^3 F(m) + x^2 F_1(m) + x F_2(m) + k = 0.$$

Il faudra pour satisfaire aux conditions de la question que $F(m)$ ait trois racines infinies, et que $F_1(\infty)$ ne soit pas nul; c'est-à-dire que l'équation de la courbe transformée doit être comme il suit

$$ax^3 + bx^2 + cxy + dy^2 + ex + fy + g = 0,$$

avec la condition expresse que d ne soit pas nul. Maintenant on pourra, en conservant l'axe des y, changer la direction de l'axe des x de sorte que le terme en xy disparaisse; puis on transportera l'origine sur l'axe des y de manière à faire disparaître le terme de premier degré en y. Dès lors l'équation prendra la forme ci-dessus indiquée, savoir

$$(1) \qquad y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Or en discutant les diverses circonstances que peuvent présenter les trois racines de l'équation formée par le second membre égalé à zéro, on démontrera aisément l'existence de cinq cas ou formes distinctes qui ne peuvent pas rentrer les unes dans les autres par les transformations de la perspective. Et parce que toute courbe du troisième ordre prend par la perspective une forme com-

prise dans l'équation (1), il s'ensuit qu'elle peut toujours être considérée comme la perspective de l'une des cinq paraboles.

L'équation

$$y^2 = (x - a)^2(x - b)$$

présente deux formes selon qu'on a $b > a$ ou $b < a$.

Considérons maintenant que pour la courbe représentée par l'équation (1), l'axe des x est diamètre de toutes les cordes parallèles à l'axe des y, c'est-à-dire passant par le point d'inflexion qui est à l'infini ; de plus, les lignes qui joignent deux à deux les points où deux telles cordes rencontrent la courbe, se rencontrent elles-mêmes sur l'axe des x; et enfin les tangentes aux deux extrémités de l'une de ces mêmes cordes se rencontrent également sur ce même axe.

Donc si l'on revient à la courbe dont l'équation (1) est la perspective pour y chercher les faits correspondants à ceux qu'on vient d'énumérer, on reconnaîtra la vérité des propositions suivantes énoncées dans la note citée.

« Si autour d'un point d'inflexion d'une courbe du troisième degré on fait tourner une transversale, et qu'aux deux points où elle coupera la courbe, on mène les deux tangentes, leur point de concours engendrera une ligne droite.

» Les droites qui joindront deux à deux les points où deux de ces transversales rencontrent la courbe, se rencontreront sur cette droite.

» Enfin cette droite rencontrera chaque transversale en un point qui sera le conjugué harmonique du point d'inflexion par rapport aux deux points où la transversale rencontrera la courbe. » (P. 349).

De plus, remarquez que la tangente à la courbe (1) est parallèle à l'axe des y dans les points situés sur l'axe des

x; donc si l'on revient à la courbe primitive, on reconnaîtra que par un point d'inflexion on peut généralement mener trois tangentes à la courbe (on ne comprend pas dans ce nombre la tangente menée au point d'inflexion lui-même), et que les trois points de contact sont sur la droite dont il vient d'être question (*).

C'est pourquoi cette droite, dit M. Chasles, et le point d'inflexion jouissent, par rapport à la courbe, des mêmes propriétés qu'un point et sa *polaire* par rapport à une conique. Et l'auteur l'appelle effectivement la *polaire* du point d'inflexion.

La construction de l'équation (1) suffit encore pour démontrer la propriété des points d'inflexion d'être en ligne droite.

En effet, si, outre le point d'inflexion à l'infini, il y en a quelque part un autre, la symétrie par rapport à l'axe des x exige qu'il y en ait un troisième de l'autre côté de l'axe et correspondant à la même abscisse. Donc ces deux nouveaux points sont sur une droite qui rencontre le premier à l'infini. D'ailleurs un quatrième point d'inflexion ne saurait exister à moins d'être extérieur à la ligne des trois premiers; mais son existence entraînerait celle de trois nouveaux points sur les trois lignes qui joindraient ce quatrième aux trois premiers. Ces trois nouveaux en feraient connaître d'autres encore, et ainsi de suite indéfiniment, ce qui est impossible. Donc, lorsqu'il y a plus d'un point d'inflexion, il y en a trois et les trois sont en ligne droite.

La forme de l'équation (1) suffira également pour prouver que les deux polaires relatives aux deux nouveaux points d'inflexion se rencontrent sur l'axe des x qui est la polaire du point à l'infini. De là ce théorème :

(*) La tangente au point d'inflexion équivaut à trois tangentes. Tr.

Théorème. *Dans toute courbe du troisième ordre, les trois polaires relatives aux trois points d'inflexion se rencontrent en un même point.*

L'existence d'une polaire pour chacun des points d'inflexion étant démontrée, si, au lieu de faire passer à l'infini la tangente à un point d'inflexion, on y fait passer sa polaire, ce point devient manifestement un centre. Par là il est prouvé que toute courbe du troisième degré peut être considérée comme la perspective ou l'*ombre* d'une courbe à centre, et par suite il se trouve également prouvé qu'il y a dans le troisième ordre cinq courbes à centre non transformables les unes dans les autres. Ce beau théorème, dû à M. Chasles, devient ainsi le pendant de celui que Newton avait signalé.

Après cela il n'est peut être pas sans intérêt de montrer qu'il est possible, comme je l'ai indiqué ci-dessus, d'établir toute cette théorie en commençant par démontrer le nouveau mode de génération.

A cet effet, on remarquera premièrement qu'en vertu du théorème énoncé sous le n° 12 à la page 287 du tome IX des *Nouvelles Annales,* les trois tangentes à une courbe du troisième ordre issues d'un même point d'inflexion I, ont leurs trois points de contact A, B, C en ligne droite. Car soit C′ le point où la droite AB rencontre la courbe, la tangente en C′ doit rencontrer de nouveau la courbe en un point qui, d'après le théorème donné, sera sur la tangente en I, c'est-à-dire au point I lui-même, puisque celui-ci est un point d'inflexion. Donc le point C′ ne peut être que le point C.

Faisons passer à l'infini cette droite des trois contacts, la courbe transformée aura trois asymptotes passant par le point d'inflexion. Que si l'on place en ce point l'origine des coordonnées et si, pour plus de simplicité, on prend la tangente en ce même point pour axe des x,

on connaîtra par la théorie des asymptotes que l'équation de la transformée doit avoir la forme

$$(2) \qquad x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3 + 3dy = 0.$$

Dès lors il est manifeste que par effet de la perspective le point d'inflexion est devenu centre, ce qui établit en même temps la relation harmonique entre ce point et la droite des contacts.

A la vérité il peut arriver que deux des tangentes issues d'un même point d'inflexion deviennent imaginaires; mais le *principe de continuité* de M. Poncelet ou des *relations contingentes* de M. Chasles, suffit pour prouver que, même dans ce cas, la droite des contacts subsiste et que son passage à l'infini doit procurer à l'équation de la courbe proposée les mêmes modifications.

Ainsi il est de nouveau prouvé que toute courbe du troisième ordre peut être considérée comme la perspective d'une courbe à centre. D'ailleurs en discutant la situation et la réalité des asymptotes dans l'équation (2), on verra que cette équation renferme cinq formes non réductibles les unes aux autres; de là le théorème de M. Chasles.

La considération de l'équation (2) permet aussi d'établir en quelques mots la propriété des points d'inflexion d'être en ligne droite, et celle des polaires de se rencontrer en un même point.

M. Chasles a compris les deux générations des courbes du troisième ordre sous un seul énoncé qu'il me paraît utile de transcrire :

Ainsi que les courbes du second degré ne peuvent donner lieu qu'à une seule espèce de cône, de même les courbes du troisième degré ne peuvent donner lieu qu'à cinq espèces de cônes;

En coupant ces cônes d'une certaine manière, on forme les cinq paraboles cubiques;

Et les coupant d'une autre manière, on forme les cinq courbes qui ont un centre.

Ceci peut donner lieu à quelques remarques. On sait que le cône du second ordre peut être coupé dans une infinité de directions de manière à donner la parabole ordinaire, et dans deux directions seulement de manière à donner le cercle. Mais un cône du troisième ordre ne peut être coupé que dans une ou dans trois directions différentes, de manière à donner soit une parabole, soit une courbe à centre. On sait aussi qu'il est toujours possible de transformer la figure plane formée par un système de deux courbes du second degré en une perspective où ces deux courbes deviennent des cercles (Poncelet). Au contraire il sera impossible en général de transformer un système de deux courbes du troisième ordre en un autre système où chacune de ces deux courbes ait reçu une forme déterminée d'avance, soit parabolique, soit à centre.

(*La suite prochainement.*)

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 461

(voir page 242);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

I. La sommation de la série proposée peut se déduire du théorème suivant qui fait connaître une infinité de séries convergentes et leurs sommes.

Soient x_0 une quantité entière nulle, positive ou négative; x une variable entière; u_x une fonction de cette variable qui, lorsque cette dernière croît de x_0 inclusivement à l'infini positif, reste toujours déterminée ainsi que

Δu_x et tend vers une limite unique finie ou nulle. U représentant cette limite, on a

$$(A) \qquad \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \Delta u_x = U - u_{x_0}.$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'équation connue

$$u_{x_0+i+1} = u_{x_0} + \Delta u_{x_0} + \Delta u_{x_0+1} + \ldots + \Delta u_{x_0+i}.$$

III. Soient p, q des nombres entiers absolus non nuls; f, g des quantités entières distinctes telles, que

$$f + x_0 \overline{\gtrless} 1, \quad g + x_0 \overline{\gtrless} 1.$$

Si

$$u_x = \frac{1}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p-1)},$$

on a

$$U = 0, \quad \Delta u_x = -\frac{p}{x+f+p} \cdot u_x.$$

Si

$$u_x = \frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p-1)},$$

on a

$$U = 1, \quad \Delta u_x = -p(q-f)\frac{u_x}{(x+g)(x+f+p)}.$$

Si

$$u_x = \frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p+q-1)},$$

on a

$$U = 0, \quad \Delta u_x = -\frac{q(x+g)+p(g-f)}{(x+g)(x+f+p+q)} u_x.$$

Si

$$u_x = \sqrt{\frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p-1)}},$$

on a

$$\mathrm{U}=1,$$

$$\Delta u_x=p(f-g)\frac{\sqrt{\frac{1}{x+g}\cdot\frac{(x+g)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)\ldots(x+f+p)}}}{\sqrt{(x+f)(x+g+p)}+\sqrt{(x+g)(x+f+g)}}.$$

Si

$$u_x=\log\frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+p+1)\ldots(x+f+p-1)},$$

on a

$$\mathrm{U}=0;\quad \Delta u_x=-\log\left(\frac{x+g}{x+f}\cdot\frac{x+f+p}{x+g+p}\right).$$

III. Substituant ces valeurs et ces limites successivement dans l'équation A, on obtient

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty}\frac{1}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p)}$$

$$=\frac{1}{p}\,\frac{1}{(x_0+f)(x_0+f-1)\ldots(x_0+f+p-1)},$$

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty}\frac{1}{x+g}\cdot\frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p)}$$

$$=\frac{1}{p}\,\frac{1}{g-f}\left[\frac{(x_0+g)(x_0+g+1)\ldots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\ldots(x_0+f+p-1)}-1\right],$$

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty}\frac{q(x+g)+p(g-f)}{x+g}$$

$$\times\frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p+q)}$$

$$=\frac{(x_0+g)(x+g+1)\ldots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\ldots(x_0+f+p+q-1)},$$

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x+g}\cdot\frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+q+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p+q)}}}{\sqrt{(x+f)(x+q+p)}+\sqrt{(x+g)(x+f+p)}}$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{f-g}\left[1-\sqrt{\frac{(x_0+q)(x_0+g+1)\ldots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\ldots(x_0+f+p-1)}}\right],$$

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \log\left(\frac{x+g}{x+f}\cdot\frac{x+f+p}{x+g+p}\right)$$

$$=\log\left[\frac{(x_0+g)(x_0+g+1)\ldots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\ldots(x_0+f+p-1)}\right].$$

On aura la série proposée en posant

$$x_0=0,\quad f=1,\quad p=n-1$$

dans la première des formules ci-dessus.

IV. Soient m, n, b, c des quantités non nulles telles, que

$$cm=bn \lesseqgtr 0;$$

et α une quantité non nulle telle, que la fonction $b\alpha^x+c$ ne soit jamais nulle quand on fait croître x de x_0 à $+\infty$.

Posons

$$u_x=\frac{m\alpha^x+n}{b\alpha^x+c},$$

$$\Delta u_x=(cm-bn)(\alpha-1)\frac{\alpha^x}{(b\alpha^{x+1}+c)(b\alpha^x+c)}.$$

Si

$$\alpha=+1,$$

u_x n'est pas une fonction de x; si

$$\alpha=-1,$$

la limite n'est pas unique.

$$0 > \alpha^2 < 1, \quad U = \frac{n}{c}; \quad \text{si} \quad 1 < \alpha^2, \quad U = \frac{m}{b}.$$

Substituant dans A

$$0 < \alpha^2 < 1, \quad \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{\alpha^x}{(b\alpha^{x+1} + c)(b\alpha^x + c)} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{\alpha^{x_0}}{b\alpha^{x_0} + c},$$

$$1 < \alpha^2, \quad \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{\alpha^x}{(b\alpha^{x+1} + c)(b\alpha^x + c)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{b\alpha^{x_0} + c}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 423

(voir t. IX, p. 195, 234);

PAR UN ABONNÉ.

On a mesuré les trois côtés a, b, c d'un triangle rectiligne ABC; α, β, γ sont les erreurs absolues respectives qu'on peut commettre sur la mesure des trois côtés a, b, c. Évaluer l'influence de ces erreurs sur les angles A, B, C.

Soient a_1, b_1, c_1 les variations des angles A, B, C, lorsque dans le triangle ABC

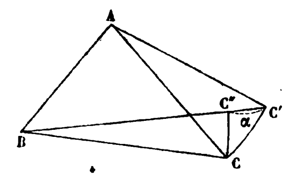
	a	devient	$a + \alpha$,
a_2, b_2, c_2, les variations lorsque	b	»	$b + \beta$,
a_3, b_3, c_3, »	c	»	$c + \gamma$.

Les variations des A, B, C lorsque a devient $a + \alpha$; b devient $b + \beta$ et c devient $c + \beta$, seront

$$a_1 + a_2 + a_3, \quad b_1 + b_2 + b_3, \quad c_1 + c_2 + c_3;$$

en négligeant une quantité très-petite par rapport à ces variations.

Calculons a_1, b_1, c_1.



Si a devient $a+\alpha$, les côtés b et c restant les mêmes, le triangle ABC deviendra ABC′,

$$a_1 = \mathrm{CAC'} = \frac{\mathrm{CC'}}{b}, \quad b_1 = -\,\mathrm{CBC'} = \frac{\mathrm{CC''}}{a};$$

mais le triangle CC′C″ donne

$$\mathrm{CC'} = \frac{\alpha}{\sin \mathrm{C}}, \quad \mathrm{CC''} = \frac{\alpha}{\operatorname{tang} \mathrm{C}};$$

donc

$$a_1 = \frac{\alpha}{b \sin \mathrm{C}}, \quad b_1 = \frac{-\alpha}{a \operatorname{tang} \mathrm{C}},$$

et, par analogie,

$$c_1 = \frac{-\alpha}{a \operatorname{tang} \mathrm{B}}.$$

Dans ces formules, α peut être positif ou négatif; on aura de même

$$a_2 = -\frac{\beta}{b \operatorname{tang} \mathrm{C}}, \quad b_2 = \frac{\beta}{c \sin \mathrm{A}}, \quad c_2 = -\frac{\beta}{b \operatorname{tang} \mathrm{A}};$$

$$a_3 = -\frac{\gamma}{c \operatorname{tang} \mathrm{B}}, \quad b_3 = -\frac{\gamma}{c \operatorname{tang} \mathrm{A}}, \quad c_3 = \frac{\gamma}{a \sin \mathrm{B}};$$

d'où (en désignant par A_1, B_1, C_1 les valeurs qu'il s'agit d'évaluer),

$$(1) \begin{cases} \mathrm{A}_1 = a_1 + a_2 + a_3 = \dfrac{\alpha}{b \sin \mathrm{C}} - \dfrac{\beta}{b \operatorname{tang} \mathrm{C}} - \dfrac{\gamma}{c \operatorname{tang} \mathrm{B}}; \\ \mathrm{B}_1 = b_1 + b_2 + b_3 = -\dfrac{\alpha}{a \operatorname{tang} \mathrm{C}} + \dfrac{\beta}{c \sin \mathrm{A}} - \dfrac{\gamma}{c \operatorname{tang} \mathrm{B}}, \\ \mathrm{C}_1 = c_1 + c_2 + c_3 = -\dfrac{\alpha}{a \operatorname{tang} \mathrm{B}} - \dfrac{\beta}{b \operatorname{tang} \mathrm{A}} + \dfrac{\gamma}{a \sin \mathrm{B}}. \end{cases}$$

L'erreur A_1 sera la plus grande possible si a_1, a_2, a_3 sont de même signe, c'est-à-dire si β et γ sont de signe contraire à α, sa valeur absolue sera alors

$$A_1 = \frac{\alpha}{b \sin C} + \frac{\beta}{b \operatorname{tang} C} + \frac{\gamma}{c \operatorname{tang} B}.$$

Si l'on mesure les côtés à la chaîne, les plus grandes valeurs de α, β, γ seront

$$\frac{1}{1000}a, \quad \frac{1}{1000}b, \quad \frac{1}{1000}c,$$

donc

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum de } A_1 = \dfrac{1}{1000}\left(\dfrac{a}{b \sin C} + \dfrac{1}{\operatorname{tang} C} + \dfrac{1}{\operatorname{tang} B}\right), \\ \text{ou} \\ \text{Maximum de } A_1 = \dfrac{2}{1000}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tang} C} + \dfrac{1}{\operatorname{tang} B}\right). \end{array} \right.$$

Cette formule met en évidence l'inconvénient qu'il y a à prendre des angles trop petits dans les triangles topographiques, et montre que la forme équilatérale est la plus avantageuse.

Si l'on suppose que B et C soient égaux à 45 degrés, qui est la plus petite valeur admise, on aura

$$\text{Maximum de } A_1 = \frac{4}{1000}.$$

Dans cette formule, A_1 représente la longueur de l'arc dans un cercle de rayon 1; si l'on veut exprimer l'erreur en secondes, on aura

$$\frac{4}{1000} \cdot \sin 1'' = 13''.$$

Si l'on admet des angles de 30 degrés, on peut commettre une erreur de 22 secondes. Si l'on veut connaître la limite de l'erreur commise sur les angles d'un triangle particulier, après avoir calculé les angles on se servira

de la formule (2), qui peut être mise sous la forme plus générale maximum de $A_1 = 2\varepsilon\left(\frac{1}{\tang C} + \frac{1}{\tang B}\right)$.

Nota. On arrive également aux formules (1), en prenant dans les formules telles que $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, la différentielle totale de cos A.

SOLUTION DE LA QUESTION 470

(voir, p. 170);

PAR M. DECHARME,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot),

ET M. BANACHIEWICZ,
Élève de l'École Centrale.

Si sur la diagonale d'un rectangle comme corde on décrit un cercle, le lieu des extrémités d'un diamètre parallèle à l'autre diagonale est une hyperbole équilatère.

J'appelle a et b les deux côtés du rectangle; je prends a pour axe des x, b pour axe des y.

En appelant α et β les coordonnées du centre du cercle, l'équation de ce cercle passant par l'origine est

$$(1) \qquad 2\alpha x + 2\beta y = x^2 + y^2,$$

le point $x = a$, $y = b$ appartient au cercle; donc

$$(2) \qquad 2\alpha a + 2\beta b = a^2 + b^2.$$

L'équation de la parallèle menée par le centre du cercle est

$$(3) \qquad \alpha b + \beta a = ay + bx.$$

Éliminant α et β des équations (1), (2), (3), on a le lieu cherché.

Or

$$\alpha = \frac{y(a^2+b^2) - b(x^2+y^2)}{2(ay-bx)},$$

$$\beta = \frac{a(x^2+y^2) - x(a^2+b^2)}{2(ay-bx)},$$

substituant dans l'équation (3), et multipliant par $2(ay-bx)$, faisant les réductions et mettant a^2+b^2 en facteur, on obtient

$$(a^2+b^2)(y^2-x^2+ax-by)=0;$$

donc l'équation du lieu est

$$y^2-x^2+ax-by=0.$$

C'est une hyperbole équilatère ayant pour centre le centre du rectangle, et pour asymptotes les parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées menées par ce centre.

Cette hyperbole passe évidemment par les quatre sommets du rectangle, car pour $x=0$ on a

$$y=0 \quad \text{et} \quad y=b,$$

et pour $x=a$ on a aussi

$$y=0 \quad \text{et} \quad y=b.$$

L'équation

$$y^2-x^2+ax+by=0$$

est celle du lieu de l'intersection du cercle par le diamètre parallèle à la première diagonale.

MM. Eugène Dupont et Ernest Fontaine, élèves du lycée Louis-le-Grand, ont envoyé des solutions du même genre.

Note du Rédacteur. Pourvu que les trois équations soient linéaires en α et β, le lieu sera une conique, car

le déterminant est du deuxième degré en x et y, et ce déterminant égalé à zéro donne l'équation du lieu, les axes étant quelconques.

Soient en général les trois équations

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,$$
$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0,$$
$$a_3\alpha + b_3\beta + c_3 = 0,$$

entre lesquelles il faut éliminer α et β.

On prend pour inconnues $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$; les équations deviennent

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = 0,$$
$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = 0,$$
$$a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma = 0;$$

pour que ces équations subsistent simultanément, on doit avoir

$$(a_1\, b_2\, c_3) = 0;$$

les crochets désignent un déterminant.

SOLUTION

De la question proposée au Concours général pour la classe de mathématiques spéciales en 1858

(voir p. 189);

PAR MM. BURAT ET BOS,
Professeurs de mathématiques au lycée de Lille.

K *étant un nombre donné et* α *un angle aussi donné, mais compris entre* 0 *et* 180 *degrés;* g, G, h *étant des*

inconnues auxiliaires liées entre elles par les relations

(1) $$G \sin g = - \sin \alpha,$$

(2) $$G \cos g = K \sin \alpha + \cos \alpha,$$

(3) $$h = \frac{G \sin^3 \alpha}{K},$$

on demande les racines réelles de l'équation

(4) $$h \sin^4 x = \sin (x - \alpha).$$

On donnera à G *le même signe qu'à* K.

Pour résoudre cette équation, il faut d'abord remplacer h par sa valeur numérique calculée en fonction de α et de K : aussi nous commencerons par déduire ce coefficient des relations (1), (2), (3).

En ajoutant membre à membre les carrés des deux premières, g disparaît, et l'on a

$$G = \pm \sqrt{\sin^2 \alpha + (K \sin \alpha + \cos \alpha)^2};$$

G est donc réel, quels que soient α et K, et le radical doit avoir, d'après l'énoncé, le même signe que K.

On peut aisément rendre cette valeur de G calculable par logarithmes : posons, en effet,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{1}{K},$$

φ étant un angle auxiliaire; nous aurons

$$G = \pm \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 (\alpha + \varphi)}{\cos^2 \varphi}}$$

$$= \pm \sin \alpha \sqrt{1 + \frac{\sin^2 (\alpha + \varphi)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}};$$

et si l'on pose

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin \alpha \cos \varphi},$$

ψ étant un deuxième angle auxiliaire, on aura

$$G = \pm \frac{\sin\alpha}{\cos\psi};$$

et, par suite,

$$h = \pm \frac{\sin^4\alpha}{K\cos\psi}.$$

La valeur négative de h doit être rejetée, parce qu'il résulte des conditions de l'énoncé que h est positif.

Résolvons maintenant l'équation

$$h\sin^4 x = \sin(x-\alpha),$$

dans laquelle h et α sont des nombres connus. Je remarque d'abord que l'équation ne change pas quand on y remplace x par $x + 2n\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif. Il suffit donc de chercher les racines comprises entre o et 2π; quand elles seront connues, on aura toutes les autres en ajoutant aux premières un nombre quelconque de circonférences positives ou négatives.

L'équation proposée s'obtient en éliminant y entre les deux équations suivantes

(5) $$y = h\sin^4 x,$$
(6) $$y = \sin(x-\alpha);$$

par suite ses racines sont égales aux abscisses des points d'intersection des courbes que représentent ces équations (5) et (6).

Or l'équation (5) représente une courbe composée d'une infinité de branches situées toutes au-dessus de l'axe des x; chacune d'elles comprend un intervalle égal à π, et son ordonnée maximum, qui est égale à h, répond au milieu de cet intervalle. De plus, aux points où elle touche l'axe des x, la courbe a avec cet axe un contact du troisième ordre, parce que les trois premières dérivées de $\sin^4 x$ s'annulent pour $x = n\pi$. Il est encore

bon de remarquer que toutes les courbes (5), qui répondent aux diverses valeurs qu'on peut attribuer à h, s'obtiendront en multipliant par h les ordonnées de la courbe

$$y = \sin^4 x\,;$$

en sorte que pour des valeurs très-petites de ce coefficient, la courbe rampera en s'élevant très-peu au-dessus de l'axe des x, tandis que, pour des valeurs de h plus grandes, elle s'élèvera rapidement au-dessus de cet axe après avoir eu avec lui un contact très-intime. Enfin ces courbes ont toutes une infinité de points d'inflexion répondant aux mêmes abscisses

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}:$$

car la dérivée seconde, égalée à zéro, donne l'équation

$$3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x = 0,$$

qui est indépendante de h, et l'on en tire

$$\operatorname{tang} x = \pm\sqrt{3},$$

d'où

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

Quant à l'équation (6), elle représente une sinusoïde ordinaire qui coupe l'axe des x à une distance de l'origine égale à α; si α varie, cette courbe se transporte parallèlement à elle-même le long de l'axe des x, sans changer de dimensions.

Dans chaque exemple particulier, on pourra tracer ces deux courbes, et leurs points de rencontre feront connaître les racines de l'équation (4). On voit immédiatement sur la figure (*) qu'il y aura toujours entre o et 2π

(*) La figure ci-jointe a été construite pour l'exemple numérique rapporté plus loin.

deux points d'intersection, mais qu'il peut toujours y en avoir deux autres pour des valeurs convenables de h et de α. Pour voir dans quel cas cette particularité se présente, nous allons d'abord chercher quelle relation doit exister entre h et α, pour que les courbes (5) et (6) soient tangentes.

Si X est l'abscisse du point de contact, H la valeur qu'il faut donner au coefficient h pour que les deux courbes se touchent, on devra avoir les deux équations

$$(7) \qquad \mathrm{H} \sin^4 \mathrm{X} = \sin(\mathrm{X} - \alpha),$$

$$(8) \qquad 4\mathrm{H} \sin^3 \mathrm{X} \cos \mathrm{X} = \cos(\mathrm{X} - \alpha);$$

j'obtiendrai la relation cherchée en éliminant X entre ces deux équations.

En les divisant membre à membre, on a

$$\operatorname{tang} \mathrm{X} = 4 \operatorname{tang}(\mathrm{X} - \alpha),$$

d'où l'on tire

$$(9) \qquad \operatorname{tang} \mathrm{X} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16 \operatorname{tang}^2 \alpha}}{2 \operatorname{tang} \alpha}.$$

Cette formule nous montre que le contact des deux courbes n'est possible que si l'on a

$$\operatorname{tang}^2 \alpha < \frac{9}{16};$$

$\operatorname{tang} \alpha$ doit donc être plus petit que $\frac{3}{4}$ ou plus grand que $-\frac{3}{4}$; l'angle dont la tangente est $\frac{3}{4}$ étant égal à $35° 52' 11'',6$, α devra être compris entre $0°$ et $36° 52' 11'',6$ ou bien entre $143° 7' 48'',4$ et $180°$.

Supposons cette condition remplie, et continuons l'élimination, on a

$$\sin^2 \mathrm{X} = \frac{\operatorname{tang}^2 \mathrm{X}}{1 + \operatorname{tang}^2 \mathrm{X}}$$

et

$$\sin(X-\alpha)=\frac{\pm \operatorname{tang}(X-\alpha)}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2(X-\alpha)}}=\frac{\pm \operatorname{tang} X}{\sqrt{16+\operatorname{tang}^2 X}};$$

en portant ces valeurs dans l'équation (7), on obtient

$$(10)\qquad H=\pm\frac{(1+\operatorname{tang}^2 X)^2}{\operatorname{tang}^3 X\sqrt{16+\operatorname{tang}^2 X}};$$

le signe du radical sera déterminé par la condition que H soit positif.

Il suffirait maintenant de remplacer tang X par

$$\frac{3\pm\sqrt{9-16\operatorname{tang}^2\alpha}}{2\operatorname{tang}\alpha},$$

pour obtenir la relation cherchée entre H et α; mais cette relation serait compliquée de radicaux qui rendraient la discussion pénible, et il est préférable de conserver l'abscisse du point de contact comme variable auxiliaire.

En considérant d'abord le cas où α est compris entre o et $36^\circ 52' 11'',6$, nous voyons par les formules (9) et (10) qu'il y a pour chaque valeur de α deux points de contact et pour H deux valeurs h' et h''; il existe donc deux courbes

$$y=h'\sin^4 x,$$
$$y=h''\sin^4 x$$

qui touchent la sinusoïde; l'équation (9) montre que les abscisses des points de contact sont inférieures à $\frac{\pi}{2}$; et, de plus, si l'on suppose h' plus petit que h'', la courbe

$$y=h'\sin^4 x$$

touchera la sinusoïde intérieurement, tandis que la courbe

$$y=h''\sin^4 x$$

la touchera extérieurement (*). Pour des valeurs de h comprises entre h' et h'', il y aura trois points de rencontre entre o et π; pour toute autre valeur de h, il n'y aura entre les mêmes limites qu'un seul point d'intersection.

Lorsque α est compris entre $143^\circ\, 7'\, 48'',4$ et 180 degrés, on obtiendra également deux courbes tangentes à la sinusoïde en attribuant au coefficient h les deux valeurs h' et h''; l'une touchera intérieurement, l'autre extérieurement : seulement les abscisses des points de contact seront comprises entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, au lieu d'être comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$. Pour des valeurs de h comprises entre h' et h'', il y aura trois points de rencontre entre π et 2π, et pour toutes les autres valeurs de h, il n'y aura entre les mêmes limites qu'un seul point d'intersection.

Enfin si α est compris entre $36^\circ\, 52'\, 11'',6$ et $143^\circ 7' 48'',4$, les deux courbes n'auront que deux points d'intersection entre o et 2π.

Ces considérations géométriques conduisent à la règle suivante pour reconnaître dans chaque cas le nombre des racines réelles de l'équation

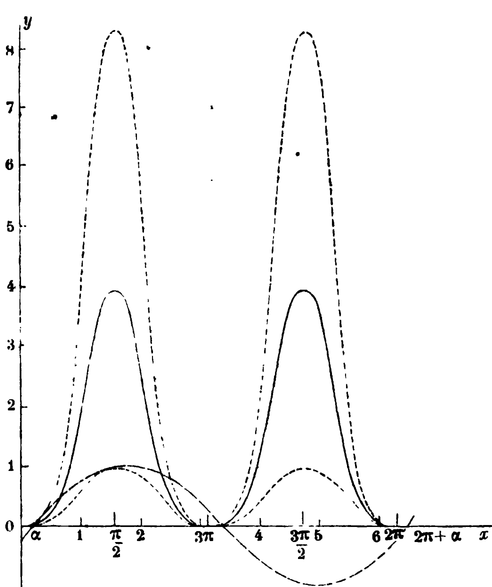
$$h \sin^4 x = \sin (x - \alpha).$$

(*) On voit facilement que si les deux valeurs de X étaient égales, H prendrait la valeur $\frac{5\sqrt{5}}{16}$ et qu'alors la courbe aurait avec la sinusoïde un contact du deuxième ordre, c'est-à-dire qu'elle la couperait au point de contact; on démontre en outre que si les deux valeurs de tang X sont inégales, h' est plus petit que $\frac{5\sqrt{5}}{16}$ et h'' est plus grand que $\frac{5\sqrt{5}}{16}$. Comme en même temps la sinusoïde s'est déplacée vers la gauche, il résulte nécessairement de la forme et de la disposition des deux courbes que la courbe $y = h' \sin^4 x$ ne pourra toucher la sinusoïde qu'à l'intérieur, tandis que la courbe $y = h'' \sin^4 x$ ne pourra la toucher qu'à l'extérieur. D'autres considérations pourraient conduire à ce résultat, qui est d'ailleurs évident quand on se rend bien compte de la nature des deux courbes.

Si α est compris entre $36^\circ 52' 11'',6$ et $143^\circ 7' 48'',4$, l'équation n'a que deux racines réelles comprises entre o et 2π.

Si α est inférieur à $36^\circ 52' 11'',6$ ou supérieur à $143^\circ 7' 48'',4$, on calculera $\tang X$ au moyen de la formule (9); on obtiendra pour cette quantité deux valeurs qui, portées dans l'équation (10), détermineront deux valeurs de H, h' et h''; si le coefficient numérique h de l'équation proposée est compris entre ces deux nombres, cette équation admet quatre racines comprises entre o et 2π; dans le cas contraire, elle n'en admet que deux. Lorsque h est égal à h' ou à h'', deux des quatre racines deviennent égales, et l'équation n'a plus entre o et 2π que trois racines distinctes; dans ce cas particulier, la racine double est fournie par l'équation (9).

Les considérations géométriques qui précèdent permettent de plus de séparer facilement les racines dans tous les cas; par exemple, lorsque h est compris entre h' et h'' et que l'angle α est plus petit que $36^\circ 52' 11'',6$, on voit sur la figure que la première racine est un peu supérieure à α; la deuxième est comprise entre la précédente et $\frac{\pi}{2}$, la troisième entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et la quatrième est un peu supérieure à $\pi + \alpha$.



La figure représente :

1°. La sinusoïde, largement ponctuée;

2°. La courbe

$$y = h \sin^4 x,$$

tracée en trait plein;

3°. Les deux courbes

$$y = h' \sin^4 x,$$
$$y = h'' \sin^4 x,$$

tracées en pointillé; ces deux courbes touchent la sinusoïde.

Elle permet de voir les contacts des deux courbes

$$y = h' \sin^4 x,$$
$$y = h'' \sin^4 x$$

avec la sinusoïde

$$y = \sin(x - \alpha),$$

et les deux premiers points d'intersection de la courbe

$$y = h \sin^4 x$$

avec cette même sinusoïde.

Dans cette figure, on a

$$\alpha = 13^{\circ} 40' 4'',1,$$
$$h = 3,978539,$$

et, par suite,

$$h' = 0,96196,$$
$$h'' = 8,2865.$$

On rencontre cette équation en astronomie, quand on se propose de déterminer l'orbite d'une planète au moyen de trois observations seulement. Au commencement de ce siècle, Gauss donna la solution de ce problème et appliqua ses formules au calcul des orbites des petites planètes comprises entre Mars et Jupiter, et découvertes depuis 1801. La méthode du célèbre astronome de Göttingue est exposée dans un ouvrage intitulé : *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium*, auctore Carolo-Friderico Gauss, Hamburgi, 1809. On y trouve l'exemple suivant (p. 167) relatif à la planète Junon, et que Delambre a reproduit dans son *Astronomie*, t. II, p. 577 :

$$3,978539 \sin^4 x = \sin(x - 13^{\circ} 40' 4'',1).$$

Cette équation a quatre racines réelles comprises entre 0 et 2π; car les formules (9) et (10) donnent dans ce cas

$$h' = 0,96196,$$
$$h'' = 8,2865,$$

et le coefficient de $\sin^4 x$ est compris entre ces deux nom-

bres; dès lors ces quatre racines se séparent facilement : la première est voisine de 13° 40′ 4″,1 et un peu supérieure à cette valeur; la deuxième est comprise entre 13° 40′ 4″,1 et 90 degrés, la troisième entre 90 et 180 degrés; et la quatrième entre 180 degrés et 193° 40′ 4″,1.

Ces quatre racines se calculent facilement en appliquant la méthode ordinaire qui sert à la résolution des équations transcendantes; d'ailleurs l'équation donnée est l'une de celles que M. Joseph Bertrand a résolues dans son *Traité d'Algèbre* (2e édit., p. 394). Nous y renvoyons le lecteur.

Les quatre racines positives inférieures à 360 degrés sont

$$\begin{aligned} x_1 &= 14^\circ.35'.\ 5'', \\ x_2 &= 32.\ \ 2.28, \\ x_3 &= 137.27.39, \\ x_4 &= 193.\ \ 4.13; \end{aligned}$$

par conséquent toutes les racines réelles de l'équation sont données par les formules

$$\begin{aligned} x &= 360^\circ \times n + \ \ 14^\circ.35'.\ 5'', \\ x &= 360 \times n + \ \ 32.\ \ 2.28, \\ x &= 360 \times n + 137.27.39, \\ x &= 360 \times n + 193.\ \ 4.13, \end{aligned}$$

dans lesquelles n représente un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Note. Dans les équations données par Gauss on n'a pas $h = \frac{G \sin^3 \alpha}{k}$, mais $h = \frac{k}{G \sin^2 \alpha}$ (*voir* p. 157 du *Theoria*). M. le professeur Dieu a traduit cet ouvrage, mais ne trouve pas d'éditeur. TM.

GRAND CONCOURS DE 1859

(voir t. XVII, p. 188).

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Première question.

On donne les trois axes $2a$, $2b$, $2c$ d'un ellipsoïde, et l'on demande de calculer l'aire de la section faite dans ce corps par un plan mené par le centre perpendiculairement à la droite qui fait avec les trois axes les angles α, β, γ.

On propose en outre de trouver l'équation de la surface conique formée par les perpendiculaires élevées par le centre à tous les plans qui, passant par ce point, déterminent des sections ayant une même aire donnée.

Note. Cette question a été retirée, parce que plusieurs élèves ont déclaré l'avoir faite.

Dès lors, on a donné la suivante :

Deuxième question.

Par un point donné sur l'axe d'une paraboloïde de révolution on mène une sécante, et par les points où cette sécante coupe la surface, on mène des normales à la section méridienne qui les contient; ces normales se rencontrent en un point donné, dont on demande le lieu.

On examinera si tous les points de la surface obtenue font réellement partie du lieu.

Note. En 1858, on a proposé cette question :

Par un point fixe donné dans le plan d'une conique passe une sécante mobile; trouver le lieu géométrique du point d'intersection des deux normales menées à la co-

nique aux deux points où la sécante coupe la conique. Quel est le lieu lorsque le point fixe est un foyer? (*Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 262.)

En février 1859, Alfred Terquem, élève du lycée Saint-Louis, a résolu complétement cette question (t. XVIII, p. 77), et a même eu égard au cas particulier où le point fixe est sur l'axe (*voir* p. 81, dernière ligne).

LOGIQUE SCIENTIFIQUE (*).

Physique.

1°. Décomposition et recomposition de la lumière,

2°. Énoncer les lois expérimentales du frottement au départ et pendant le mouvement.

3°. Expliquer pourquoi, lorsqu'un bouchon est fortement enfoncé dans le goulot d'une bouteille, et qu'on ne peut pas le retirer en exerçant sur lui une traction directe, on parvient à le retirer facilement en imprimant aux différents points du bouchon un mouvement hélicoïdal dans le goulot de la bouteille.

Mathématiques.

Première question. Par le point de contact A de deux circonférences données, on mène deux cordes AB, AD qui soient dans un rapport donné; et des centres O, C, on abaisse des perpendiculaires sur ces cordes. On demande le lieu géométrique du point de rencontre M de ces deux perpendiculaires,

Deuxième question. Sur un cercle donné O on prend à volonté un arc ANB, et sur la corde AB de cet arc on décrit une demi-circonférence AMB, puis on fait tourner

(*) *Revue de l'Instruction publique*, 14 et 21 juillet 1859.

la figure autour du diamètre perpendiculaire à AB. On demande quelle doit être cette corde pour que la somme des surfaces décrites par les arcs AMB, ANB, soit maximum.

ÉCOLE NAVALE.

Tracé graphique.

Étant donnée la projection horizontale d'une pyramide quadrangulaire dont la base est située dans un plan parallèle à la ligne de terre, ainsi que la projection *horizontale* du sommet de cette pyramide, on propose de trouver la projection verticale de cette pyramide.

Note. Il y a probablement des fautes typographiques; d'abord le plan *parallèle* n'est pas déterminé, et l'on donne aussi probablement la projection *verticale* du sommet.

Triangle.

Calculer les trois angles et la surface d'un triangle dont les trois côtés sont

$$a = 416,28; \quad b = 348,18; \quad c = 708,64.$$

ECOLE POLYTECHNIQUE. CONCOURS D'ADMISSION EN 1859.

(voir t. XVII, p. 349).

Composition mathématique.

La corde AB du cercle O partage la surface de ce cercle en deux segments tels, que le plus grand est moyen proportionnel entre le plus petit et le cercle entier.

On demande de calculer, à un dixième de seconde près, le plus petit des deux arcs sous-tendus par la corde AB.

Calcul trigonométrique.

On donne, dans un triangle sphérique, les côtés a, b, avec l'angle compris C, savoir :

$$a = 136^\circ 29' 37'',96;$$
$$b = 91.55.48\ ,27;$$
$$C = 8.\ 3.\ 6\ ,28.$$

Et on demande de calculer l'angle A avec la précision que comportent les tables à 7 décimales.

Épure de géométrie descriptive.

Un plan est donné par ses traces; dans ce plan, un cercle est donné par son rayon et la projection horizontale de son centre; le cercle est pris pour base d'un cylindre droit. On propose de mener, par un point donné, un plan tangent à ce cylindre.

Pour plus d'uniformité, on prendra les données comme il suit :

La ligne de terre xy partagera la longueur du papier en

deux parties à peu près égales. A partir du milieu O de cette ligne, on prendra vers la droite une distance O*a* égale à 40 millimètres; par le point *a*, vers la gauche de l'épure, on mènera, au-dessous de *xy*, une droite inclinée de 45 degrés sur *xy*, et, au-dessus, une droite inclinée de 60 degrés. La première de ces deux droites sera la trace horizontale du plan donné, la seconde en sera la trace verticale.

A partir du même point O, prenez sur *xy*, vers la gauche, la longueur O*b* de 55 millimètres, et élevez au-dessous de *xy* la perpendiculaire O*m* égale à 30 millimètres. Le point *m* sera la projection horizontale du centre du cercle. On donnera à ce cercle un rayon de 22 millimètres.

Sur la ligne de terre, vers la droite, prenez O*c* égale à 90 millimètres, élevez par le point *c* une perpendiculaire à *xy*; prenez sur cette perpendiculaire une distance *cp* égale à 110 millimètres au-dessous, et une distance *cp'* égale à 90 millimètres au-dessus; les points *p* et *p'* seront les projections du point donné, par lequel il faut mener le plan tangent au cylindre.

Lavis à l'encre de Chine.

Faire le lavis, à l'encre de Chine, d'une surface cylindrique de 10 centimètres de diamètre sur 15 centimètres de hauteur. Ce cylindre devra se détacher sur un fond d'une teinte plate grise; il reposera sur un socle dont la surface plane sera indiquée par une teinte plate d'une très-faible intensité.

Le modèle de cette surface cylindrique pourra être fait à teintes fondues ou adoucies, ou bien à teintes plates superposées.

On admettra que le rayon de lumière a pour projec-

tions horizontale et verticale des lignes inclinées à 45 degrés sur la ligne de terre. Le cadre limitant le dessin aura 24 centimètres de haut sur 18 centimètres de large.

COMPOSITION FRANÇAISE.

L'Art de la Guerre.

Malgré les réclamations, d'ailleurs fort louables, de la philanthropie, l'art de la guerre fait tous les jours de nouveaux progrès : les machines de destruction, les moyens d'attaque et de défense, la tactique, se perfectionnent en même temps que la civilisation elle-même. Les sciences militaires sont aussi avancées que la plupart des autres sciences, et sont cultivées avec un soin tout particulier par les nations les plus éclairées.

Il en a été de même à toutes les époques. Les peuples les plus illustres et les plus puissants de l'antiquité ont été les plus savants dans l'art de la guerre : les Grecs, les Romains. Les grands hommes, dont le nom est le plus célèbre, sont les guerriers et les conquérants, Alexandre, César, etc.

Sans doute il faut souhaiter qu'un temps vienne où toute rivalité hostile cessant entre les peuples, la guerre soit désormais inutile; mais, jusqu'à ce moment, il faut cultiver l'art de la guerre, sous peine d'être anéanti à la première collision par les nations voisines.

Note. Le tribunal *potentiel* de l'abbé de Saint-Pierre, très-praticable, rendrait les guerres européennes impossibles. Les congrès préludent à ce tribunal. TM.

DISCRIMINANTS

(voir p. 249).

9. Soit

1°. $$U = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Égalons à zéro les deux dérivées par rapport à x et par rapport à y, on a

$$ax + by = 0,$$
$$by + cx = 0;$$

éliminant les variables, on trouve

$$ac - b^2 = 0.$$

Cette quantité $ac - b^2$ est dite le *discriminant* de la fonction U; on voit que le discriminant est aussi un invariant de U (p. 254).

C'est celui qui donne l'*espèce* dans les coniques.

2°. $$U = (a, b, c, d, e, f)(x, y, z)^2;$$

les trois dérivées sont

$$ax + fy + ez = 0,$$
$$fx + by + dz = 0,$$
$$ex + dy + cz = 0;$$

éliminant, on trouve

$$abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2 = 0;$$

c'est le discriminant de la fonction U, c'est aussi l'invariant (p. 254); par des relations d'identité ce discriminant et ses dérivées donnent la discussion complète et les propriétés fondamentales des coniques, et cela existe aussi pour des lignes de degré supérieur (n° 7).

3°. $$U = (a, b, c, d)(x, y)^3;$$

les dérivées sont

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$
$$bx^2 + 2cxy + dy^2 = 0;$$

l'élimination donne

$$(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = 0;$$

c'est le discriminant de la fonction U, et c'est aussi un invariant.

Nous allons démontrer que tout discriminant est un invariant : par conséquent, la recherche des invariants se ramène à cette élimination ; mais cette démonstration exige quelques préparations.

Relations entre les coefficients d'une équation homogène et ses racines.

10. Soient

$$U = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n = 0.$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n},$$

les n racines de cette équation ; le produit des n facteurs est

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_2}{y_2}\right)\cdots\left(\frac{x}{y} - \frac{x_n}{y_n}\right) = 0,$$

ou bien, en ôtant les diviseurs,

$$(y_1 x - x_1 y)(y_2 x - x_2 y)\ldots(y_n x - x_n y).$$

Comparant cette équation à U, on trouve

$$a_0 = y_1 y_2 y_3 \ldots\ldots y_n,$$
$$a_1 = -\sum y_1 x_2 x_3 \ldots x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = (-1)^n x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.$$

11. Problème. *Exprimer le discriminant d'un* quantic *en fonction des racines de ce quantic.*

Solution.

$$U = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)\ldots(xy_n - yx_n) = 0,$$

$$\frac{dU}{dx} = y_1(xy_2 - yx_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(xy_n - yx_n)$$
$$+ y_2(xy_1 - yx_1)(xy_3 - yx_3)\ldots(xy_n - yx_n) + \ldots;$$

la propriété des équations homogènes donne

$$xU = x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy};$$

par conséquent, les racines communes à U et à $\frac{dU}{dx}$ annulent aussi $\frac{dU}{dy}$. Ces racines communes sont donc celles du discriminant; or la racine $\frac{x_1}{y_1}$ de U, substituée dans $\frac{dU}{dx}$, donne pour résultat

$$y_1(x_1y_2 - y_1x_2)(x_1y_3 - y_1x_3)\ldots;$$

la racine $\frac{x_2}{y_2}$ de U donne, par une semblable substitution,

$$y_2(x_2y_1 - y_2x_1)(x_2y_3 - x_3y_2)\ldots.$$

Le produit suivant donne toutes les racines communes à U et à $\frac{dU}{dx}$,

$$y_1y_2\ldots y_n(x_1y_2 - y_1x_2)^2(x_1y_3 - y_1x_3)^2\ldots(x_2y_3 - x_3y_2)^2\ldots,$$

et divisant par $y_1y_2\ldots y_n$.

On a pour discriminant

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2(x_1y_3 - y_1x_3)^2\ldots = 0;$$

c'est le discriminant de U.

Si nous faisons partout les y égaux à l'unité, on voit que le discriminant est le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de

$$U = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, 1)^n,$$

théorème connu.

12. Théorème. *Pour tout* quantic *binaire le discriminant est un invariant.*

Démonstration. Même notation que ci-dessus (n° 11).

U étant transformé en U_1 par le remplacement de $\alpha_1 x + \beta_1 y$ pour x et $\alpha_2 x + \beta_2 y$ pour y, le facteur $xy_1 - yx_1$ devient

$$xY_1 - yX_1 \quad \text{ou} \quad y_1(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1) - x_1(\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1);$$

ainsi

$$X_1 = -(\beta_1 y_1 - \beta_2 x_1), \quad Y_1 = \alpha_1 y_1 - \alpha_2 x_1;$$

de même,

$$X_2 = -(\beta_1 y_2 - \beta_2 x_2), \quad Y_2 = \alpha_1 y_2 - \alpha_2 x_2;$$

donc

$$(X_1 Y_2 - Y_1 X_2)^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2.$$

Le discriminant de la transformée U_1 est donc égal à la fonction U multipliée par une puissance du module; ce discriminant est donc une fonction de coefficient de U_1 égale à une fonction semblable de coefficient de U multipliée par une puissance du module. Ce discriminant est donc un invariant de U.

13. Théorème. *Le discriminant d'un* quantic *renfermant un nombre quelconque de variables est un invariant.*

Démonstration. Soit

$$U = a$$

un *quantic* à n variables et avec des coefficients représentés par des a avec divers indices. Soit

$$\Delta = 0$$

le discriminant de U, obtenu comme il a été dit ci-dessus, par élimination, et qui sera une fonction entière des a. Soit

$$U_1 = 0$$

la fonction U, *linéairement* transformée; les a seront remplacés par des A, et soit $\Delta_1 = \varphi$ le discriminant de U_1; on déduit Δ_1 de Δ en remplaçant dans Δ les a par des A.

Supposons que U renferme un facteur *multiple*, ce facteur existera dans toutes les dérivées de U par rapport aux variables, et, par conséquent, en ce cas le discriminant Δ s'évanouira identiquement; mais dans la même hypothèse U_1 contiendra aussi un facteur multiple, et, par conséquent, Δ_1 doit aussi s'évanouir identiquement; il faut donc que Δ et Δ_1 puissent s'évanouir simultanément; l'un doit être un facteur de l'autre, et, par conséquent, Δ est un invariant.

14. Soit le *quantic*

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)(x, y)^4 = 0,$$

ayant pour racines $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \frac{x_4}{y_4}$ correspondant aux racines ordinaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Si l'on a une fonction symétrique de ces racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, telles, que chaque terme renferme les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ un même nombre de fois, la somme de cette fonction exprimée en fonction des coefficients de l'équation est un invariant; car chaque terme est un produit de facteurs de la forme $x_1 y_2 - y_1 x_2$, le tout divisé par le produit $y_1 y_2 y_3 y_4$, c'est-à-dire par a_0; par conséquent, d'après le théorème du n° **12**, c'est un invariant. Cela n'aurait pas lieu si les racines ne se trouvaient pas dans chaque terme. Exemple: soit la fonction symétrique $\sum (\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2$; remplaçant par les formes en x et y, on aura

$$\frac{1}{a_0}\begin{bmatrix} (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 (x_3 y_4 - y_3 x_4)^2 \\ + (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 (x_2 y_4 - y_2 x_4)^2 \\ + (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2 (x_1 y_4 - y_1 x_4)^2 \end{bmatrix} = 24(3a_2^2 - 4a_1 a_3 + a_4 a_0$$

ce qui donne un invariant; mais

$$\sum(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2$$
$$+(\beta-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2;$$

remplaçant, on trouve

$$\frac{1}{a_0}[y_3^2\,y_4^2\,(x_1y_2-y_1x_2)^2+y_2^2\,y_4^2\,(x_1\,y_3-y_1\,x_3)^2+\ldots];$$

ce qui ne donne plus un invariant pour le *sextic*

$$(a_0,\,a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5,\,a_6)\,(x,y)^6,$$

la fonction symétrique

$$\sum(\alpha-\beta)^2\,(\gamma-\delta)^2$$

n'est plus un invariant, mais bien

$$\sum(\alpha-\beta)^2\,(\gamma-\delta)^2\,(\varepsilon-\zeta)^2.$$

On peut donc trouver une infinité d'invariants; la fonction

$$\sum(\alpha-\beta)^2\,(\alpha-\gamma)^2\,(\alpha-\delta)^2$$

n'est pas un invariant, car α s'y trouve trois fois et β deux fois seulement.

15. Il y a donc une infinité d'invariants. Tout discriminant est un invariant, mais tout invariant n'est pas un discriminant; nous verrons qu'il y a encore d'autres méthodes, et bien moins pénibles, de trouver des invariants.

L'excellent et indispensable travail de M. Painvin sur les surfaces quadratiques montre que la discussion complète et les principales propriétés de ces surfaces découlent du discriminant de la fonction quaternaire quadratique et de ses diverses dérivées; ce qui a probablement lieu pour les surfaces d'ordre supérieur.

QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE).

1. *Déterminer le lieu géométrique des milieux des cordes d'une surface du second degré*

$$(1)\qquad f(x, y, z) = 0,$$

qui passent par un point donné (x', y', z').

L'une quelconque de ces cordes a pour équations

$$(2)\qquad \frac{x-x'}{z-z'} = m,$$

$$(3)\qquad \frac{y-y'}{z-z'} = n.$$

L'équation du plan diamétral qui la divise en deux parties égales est

$$(4)\qquad mf'_{(x)} + nf'_{(y)} + f'_{(z)} = 0.$$

Donc, si l'on élimine m et n entre (2), (3) et (4), on aura l'équation du lieu géométrique cherché. L'élimination donne immédiatement

$$(5)\quad (x-x')f'_{(x)} + (y-y')f'_{(y)} + (z-z')f'_{(z)} = 0.$$

On voit que ce lieu est une surface semblable à la surface considérée (1), $f(x, y, z) = 0$, semblablement placée, et qui passe par le point donné (x', y', z').

Les points communs aux surfaces (1) et (5) appartiennent au plan représenté par l'équation

$$(6)\ (x-x')f'_{(x)} + (y-y')f'_{(y)} + (z-z')f'_{(z)} - 2f(x, y, z) = 0,$$

qui est, comme on sait, du premier degré.

2. *Par un point (x', y', z') de l'hyperboloïde*

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

on mène deux génératrices rectilignes de la surface, trouver l'équation du plan de ces deux droites.

En posant

(2) $$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mathrm{M},\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\mathrm{N},\quad 1+\frac{y}{b}=\mathrm{M}',\quad 1-\frac{y}{b}=\mathrm{N}'$$

et

(3) $$\frac{x'}{a}+\frac{z'}{c}=m,\quad \frac{x'}{a}-\frac{z'}{c}=n,\quad 1+\frac{y'}{b}=m',\quad 1-\frac{y'}{b}=n';$$

l'équation (1) de l'hyperboloïde devient

(4) $$\mathrm{MN}=\mathrm{M}'\mathrm{N}',$$

et l'on a

(5) $$mn=m'n',$$

puisque le point (x', y', z') est à la surface.

Les équations de l'une des deux génératrices menées par ce point sont

(6) $$\mathrm{M}n=\mathrm{M}'n',$$

(7) $$\mathrm{N}m=\mathrm{N}'m'.$$

L'autre génératrice a pour équations

(8) $$\mathrm{M}n=\mathrm{N}'m',$$

(9) $$\mathrm{N}m=\mathrm{M}'n'.$$

En additionnant (6) et (7), ou (8) et (9), il vient

(10) $$\mathrm{M}n+\mathrm{N}m=\mathrm{M}'n'+\mathrm{N}'m';$$

cette dernière équation représente évidemment le plan des deux génératrices.

Si l'on remplace dans (10), M, N, M', N' par leurs expressions (2), on a d'abord

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)n+\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)m=\left(1+\frac{y}{b}\right)n'+\left(1-\frac{y}{b}\right)m',$$

ou

$$\frac{x}{a}(n+m)+\frac{y}{b}(m'-n')+\frac{z}{c}(n-m)=n'+m'.$$

Mais, d'après les relations (3), on a

$$(n+m)=\frac{2x'}{a},\quad (m'-n')=\frac{2y'}{b},\quad (n-m)=-\frac{2z'}{c},$$
$$n'+m'=2;$$

donc

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=1$$

est l'équation demandée.

Remarque. On résoudra la même question pour le paraboloïde $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$, en remarquant que, dans ce cas,

$$M=\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\quad N=\frac{x}{a}-\frac{y}{b},\quad M'=2z,\quad N'=1,$$
$$m=\frac{x'}{a}+\frac{y'}{b},\quad n=\frac{x'}{b}-\frac{y'}{b},\quad m'=2z',\quad n'=1;$$

l'équation (10) devient alors

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)n+\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)m=2(z+z'),$$

ou

$$\frac{x}{a}(n+m)+\frac{y}{b}(n-m)=2(z+z').$$

Mais

$$(n+m) = +\frac{2x'}{a}, \quad (n-m) = -\frac{2y'}{b};$$

on a donc

$$\frac{x'x}{a^2} - \frac{y'y}{b^2} = (z+z')$$

pour l'équation du plan des deux génératrices rectilignes du paraboloïde. G.

NOTE SUR LA THÉORIE DES POLAIRES RÉCIPROQUES;

PAR M. A. MANNHEIM.

Étant donnés une conique M, *un point* d *et sa polaire* F *par rapport à* M; *trouver un cercle directeur de centre* o *tel, que la polaire réciproque de* M *ait pour foyer le pôle de* F *par rapport à* o, *et par suite pour directrice la polaire de* d *par rapport à la même courbe.*

Prenons sur F des points conjugués a et b, a' et b', etc.; on sait que ces points sont en involution.

Par suite, si sur ab, $a'b'$, etc., comme diamètre on décrit des circonférences, celles-ci se coupent en deux points fixes; ces deux points sont les centres des cercles directeurs demandés.

Désignons par o l'un de ces centres et par l le point où la ligne od coupe F. Joignons le point l au point t où ad coupe M; soit g le point où la ligne lt coupe oa; on a toujours, quel que soit le point a et par suite le point t:

$$\frac{\sin . aot}{\sin . tol} = \text{const.},$$

$$\frac{1}{og} - \frac{1}{oa} = \text{const.}$$

D'après cette dernière équation, le point g décrit une conique qui a pour foyer le point o, pour directrice la droite F, et que nous désignerons par N. La tangente en g à cette conique passe par b; on voit donc que le point l est un centre d'homologie de N et de M, et que F est l'axe d'homologie.

Nous sommes arrivés à la conique N en partant de M; on peut faire l'inverse en se donnant la conique N, son foyer o, sa directrice F et un point quelconque d.

Pour vérifier les résultats que nous avons énoncés dans cette Note, il suffit de les transformer au moyen de la théorie des polaires, en prenant pour courbe directrice un cercle décrit du point o comme centre.

On retrouvera ainsi les théorèmes connus, que nous avons primitivement choisis, et d'où nous sommes partis pour arriver à la solution précédente.

Nous ferons remarquer, en terminant, que pour obtenir des propriétés de la droite F, il suffit de transformer des propriétés du foyer d'une conique.

Ainsi, par exemple : *Deux tangentes fixes d'une conique interceptent, sur une tangente mobile, un segment qui est toujours vu du foyer sous un angle constant;* on en déduit que, *si l'on joint deux points fixes de* M *à un point quelconque de cette courbe, on obtient deux droites qui interceptent sur* F *un segment qui est toujours vu du point* o *sous un angle constant.*

SUR LES LIMITES DES RACINES;

PAR M. TOUSSAINT,
Professeur au lycée de Caen.

Dans le numéro du mois de juin des *Annales*, on lit une Note relative à la limite supérieure des racines négatives, déduite de la formule aux différences de Newton; voici quelques observations qui me paraissent propres à compléter cette théorie.

Prenons un exemple particulier : soit à traiter l'équation

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0.$$

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	-14	$+9$	-6	$+12$
0	-5	$+3$	$+6$	
$+1$	-2	$+9$		
$+7$	$+2$			

Je vais démontrer que lorsqu'on est arrivé à un nombre x_0 tel, que u et toutes les différences écrites sur une même ligne horizontale soient alternativement positives et négatives, ce nombre sera une limite inférieure des racines de l'équation. Il suffit pour cela de faire voir que pour toute valeur de x moindre que x_0, telle que $x_0 - y$, le premier membre ne peut plus changer de signe.

Pour cela, je reprends la fonction

$$u_x = u_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots$$

Posons l'accroissement $x - x_0\, y$, et au lieu de u_x écrivons

$f(x)$ ou, comme $x = x_0 + y$, $f(x_0 + y)$, il vient

$$f(x_0+y)=f(x_0)+\frac{y}{h}\Delta f(x_0)+\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{1.2}+\ldots.$$

Changeons y en $-y$, il vient

$$f(x_0-y)=f(x_0)-\frac{y}{h}\Delta f(x_0)+\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}+1\right)\frac{\Delta^2 f(x)}{1.2}-\ldots.$$

Les coefficients des termes de ce polynôme sont alternativement positifs et négatifs, mais comme les quantités $f(x_0)$, $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0)$, ... sont aussi alternativement positives et négatives, il en résulte que tous les termes de ce développement auront le même signe; donc $f(x_0-y)$ ne peut plus devenir nul. Donc....

Le Programme de Mathématiques spéciales énonce le théorème suivant :

Si la différence h *et les quantités* u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0 \ldots \Delta^m u_0$ *sont positives*, $x_0 + (m-1)h$ *est une limite supérieure des racines positives de l'équation* $f(x) = 0$.

Ce théorème donne une limite supérieure trop éloignée; il est facile d'en établir une qui est généralement beaucoup plus rapprochée. Voici comment :

Si l'on arrive à un nombre x_0 tel, que la valeur de u, la valeur de Δ précédente d'un rang, celle de Δ^2 en remontant encore d'un rang, et ainsi de suite, soient toutes de même signe, ce nombre sera une limite supérieure de l'équation.

Pour le démontrer, je représente par Δ' les différences correspondantes non plus à un accroissement h, mais à un accroissement $-h$; de sorte que

$$f(x_0-h)-f(x_0)=\Delta' f(x_0);$$

dans $f(x_0+y)$ je change h en $-h$, et je remplace alors les Δ par des Δ'; il vient

$$f(x_0+y)=f(x_0)-\frac{y}{h}\Delta' f(x_0)+\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right)\frac{\Delta'^2 f(x_0)}{1.2}-\ldots;$$

les coefficients sont alternativement positifs et négatifs.

Exprimons maintenant les Δ' en fonction de Δ; or on a

$$\Delta' f(x_0) = -[(f x_0) - f(x_0 - h)] = -\Delta f(x_0) - h.$$

Ceci nous montre que, pour avoir la différence en Δ' d'une fonction, il faut prendre la différence en Δ de cette fonction, y remplacer x_0 par $x_0 - h$, et changer son signe.

Or, si l'on remarque que,

$$\Delta'^2 f(x_0) = \Delta'[\Delta' f(x_0)],$$

que

$$\Delta'^3 f(x_0) = \Delta'[\Delta'^2 f(x_0)]\ldots,$$

et qu'on applique la loi ci-dessus, on aura

$$\Delta' f(x_0) = -\Delta f(x_0 - h),$$
$$\Delta'^2 f(x_0) = \Delta^2 f(x_0 - 2h),$$
$$\Delta'^3 f(x_0) = -\Delta^3 f(x_0 - 3h)\ldots;$$

en substituant dans le développement, il vient

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + \frac{y}{h}\Delta f(x_0 - h) + \frac{y}{h}\left(\frac{y}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0 - 2h)}{1.2}$$
$$+ \frac{y}{h}\left(\frac{y}{h} + 1\right)\left(\frac{y}{h} + 2\right)\frac{\Delta^3 f(x_0 + 3h)}{1.2.3} + \ldots.$$

Les coefficients sont tous positifs; or nous supposons que $f(x_0)$, $\Delta f(x_0 - h)$, $\Delta^2 f(x_0 - 2h)\ldots$ sont tous aussi de même signe : donc $f(x_0 + y)$ ne peut pas être nul, quelque valeur qu'on attribue à y. Donc x_0 est une limite supérieure des racines de l'équation.

En appliquant ceci à l'équation ci-dessus, nous aurons pour limite inférieure des racines, -1, et pour limite supérieure, $+2$; le théorème du programme nous aurait donné 4 pour limite supérieure.

Je terminerai cette petite Note en établissant une formule symbolique très-facile à retenir, et qui permet de

calculer les différences correspondantes à un intervalle h' de la variable en fonction des différences correspondantes à un intervalle h. Nous avons

$$f(x_0+h')=(x_0)+\frac{h'}{h}\Delta f(x_0)+\frac{h'}{h}\left(\frac{h'}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{1.2}+\ldots.$$

Soit δ, δ^2,... les différences correspondantes à l'intervalle h' de la variable; on aura

$$\delta f(x_0)=f(x_0+h')-(x_0)=\frac{h'}{h}\Delta u_0+\frac{h'}{h}\left(\frac{h'}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{1.2}+\ldots,$$

ou bien, symboliquement,

$$\delta u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}-1\right]u_0.$$

Appliquons cette formule non plus à u_0, mais à la fonction δu_0, nous aurons

$$\delta^2 u_0=\delta.\delta u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}-1\right]\delta u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}-1\right]^2 u_0,$$

et ainsi de suite, on a généralement la formule symbolique

$$\delta^n u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}-1\right]^n u_0.$$

Dans le cas ordinaire $\frac{h'}{h}=\frac{1}{10}$,

et l'on a

$$\delta^n u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{1}{10}}-1\right]^n u_0,$$

formule que les élèves retiennent facilement. On ne prend que les termes du développement dans lesquels l'indice Δ ne dépasse pas le degré de l'équation que l'on traite, puisque si l'équation est du degré m, les différences d'un ordre supérieur à m sont nulles.

RECTIFICATION D'UN THÉORÈME DE MM. STEINER ET DEWULF;

PAR LE RÉV. G. SALMON.

Dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, p. 179, M. Dewulf donne ce théorème, qu'il attribue à M. Steiner:

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe de la classe n *est une courbe de degré* n^2.

Remarquons cependant que dans le cas où $n = 2$, le lieu n'est pas du degré ($n^2 =$) 4e, mais seulement du second degré. De plus, si la courbe donnée est une parabole, le lieu est une ligne droite.

C'est ce que M. Terquem a remarqué; il dit dans une note : « Dans les coniques, ce lieu est un cercle *double.* »

Mais pourquoi *double?* (*Voir* Note finale.)

Pour moi, je ne vois pas pourquoi.

Cela m'a donné de graves soupçons que le théorème énoncé n'était pas exact.

Voyons donc la démonstration de M. Dewulf. Il réduit le problème à l'élimination de p_1, q_1, p_2, q_2 entre les cinq équations

$$(1) \qquad p_1 Y + q_1 X = 1,$$

$$(2) \qquad p_2 Y + q_2 X = 1,$$

$$(3) \qquad p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0,$$

$$(4) \qquad F(p_1 q_1) = 0,$$

$$(5) \qquad F(p_2 q_2) = 0.$$

Il dit que « les équations 4, 5 sont du degré n, les trois

autres du premier degré. D'après le théorème de Bezout, l'équation finale sera du degré n^2. »

Mais l'équation (3) n'est pas du premier degré, elle est du second, et il semble que l'équation finale doit être du degré $2n^2$.

Maintenant, comme nous connaissons que, quand $n=2$, le degré est moins élevé, tout ce que l'investigation de M. Dewulf nous apprend, est que le degré du lieu *ne peut pas excéder* $2n^2$. Mais le degré peut être moins élevé, parce que des facteurs étrangers peuvent entrer dans le procédé d'élimination.

Faisons donc une nouvelle investigation du degré de ce lieu. Pour connaître ce degré, il suffit de connaître en combien de points il peut rencontrer une droite quelconque. Examinons donc en combien de points le lieu peut rencontrer la droite à l'infini.

Le sommet d'un angle sera à l'infini quand les deux côtés sont parallèles. La question donc revient à celle-ci :

Combien de fois pouvons-nous avoir deux parallèles tangentes d'une courbe de la classe n, qui se couperont à angle droit?

Mais comment est-il possible que deux droites *parallèles* se coupent à angle droit?

Formons la condition que la droite

$$y = mx + C$$

soit perpendiculaire à la droite

$$y = mx + C',$$

et nous trouvons

$$1 + m^2 = 0.$$

Il faut donc que les droites cherchées passent par l'un ou l'autre des deux points imaginaires à l'infini $y = \pm x\sqrt{-1}$,

c'est-à-dire par l'un ou l'autre des deux points où un cercle quelconque rencontre la droite à l'infini.

Je conclus donc que le lieu que nous examinons peut rencontrer la droite à l'infini seulement dans ces deux points imaginaires; mais je dis, de plus, que ces points seront points multiples du lieu, de degré $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Car puisque par chaque point on peut tirer n tangentes, chaque point peut être l'intersection de $\frac{n(n-1)}{1.2}$ couples de tangentes.

Je conclus donc que le degré du lieu est, non pas n^2, mais n^2-n.

Peut-être ce raisonnement sera mieux entendu, si nous faisons la projection de la question.

Si la droite à l'infini est projetée en une droite AB, et les deux points où un cercle rencontre la droite à l'infini soient projetés en deux points (réels ou imaginaires) A, B, alors les projections des deux droites, qui se coupent à angle droit, couperont A, B en deux points M, T qui seront harmoniques conjugués avec A, B.

Or, il est évident que les points M, T ne peuvent pas coïncider à moins que tous les deux coïncident ou avec A ou avec B. Et puisque de n droites, il y a $\frac{n(n-1)}{1.2}$ intersections, le point A peut être, en $\frac{n(n-1)}{1.2}$ différentes manières, l'intersection de deux tangentes qui coupent AB harmoniquement.

Si la droite AB touche la courbe donnée, chaque point M de cette droite est, en $n-1$ diverses manières, un point du lieu, car il est l'intersection de la tangente AB qui passe par T avec chaque autre tangente qui passe par M.

Je crois donc que le théorème de M. Steiner doit être énoncé :

« *Le lieu des sommets des angles droits, circonscrits à une courbe de la classe* n, *est une courbe de degré* n (n — 1).

Mais si la courbe donnée est une parabole, c'est-à-dire si la droite à l'infini touche cette courbe, alors le degré du lieu sera $(n-1)^2$; *et si la droite à l'infini est une* double *tangente, ce degré sera* (n — 1) (n — 2).

Par exemple, pour la parabole semi-cubique ($y^2 = px^3$), le lieu est une conique.

Parce qu'il y a des gens qui ne croiront à rien qui ne soit pas démontré par voie d'analyse, j'ajoute une autre investigation de ces théorèmes.

La droite $\alpha x + \beta y + \gamma$ touchera une courbe de la classe n si les constantes α, β, γ satisfont à une équation du degré n,

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

et l'équation des n tangentes à cette courbe, qu'on peut tirer par un point $x'y'$, est

$$\varphi(y - y', \quad x' - x, \quad xy' - yx') = 0;$$

et l'équation

$$\varphi(y, -x, xy' - yx') = 0$$

représentera n droites par l'origine parallèles à ces n tangentes. Cette équation est de degré n aussi bien en x', y' qu'en x, y.

Maintenant, nous désirons former la condition que deux de ces droites soient réciproquement perpendiculaires.

Pour cela, il suffit de former la condition que deux racines cette équation en x, y soient de la forme m et $-\frac{1}{m}$.

Je dis que cette condition est du degré $n - 1$ dans les

coefficients de l'équation : ainsi du degré $n(n-1)$ en x', y'.

Par exemple, la condition que l'équation

$$Ax^2 + Bxy^2 + Cy^2$$

$\left(\text{qui est de degré second en } \frac{x}{y}\right)$ peut avoir deux racines α, β qui satisfont à la condition $\alpha\beta = -1$ est $A + C = 0$ ou du premier degré dans les coefficients.

La condition que la cubique

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$$

peut avoir deux racines α, β qui satisfont à la condition $\alpha\beta = -1$ est (comme on voit facilement)

$$A^2 + D^2 + AC + BD = 0,$$

ou du second degré dans les coefficients.

De même pour une équation de quatrième degré, la condition est du troisième dans les coefficients.

Note du Rédacteur. Depuis longtemps M. Dewulf m'a indiqué les rectifications signalées ici par le célèbre analyste. Mon intention était de ne les publier qu'avec un Mémoire intéressant de ce savant militaire sur les polaires inclinées, ce qui aura lieu prochainement.

Lorsqu'on circonscrit un angle *donné* à une conique, le lieu du sommet est du quatrième degré; la courbe est formée de deux parties, l'une relative à l'angle donné, et l'autre à son supplément; moins l'angle diffère de son supplément, plus les deux parties se rapprochent. Lorsque la différence est nulle (angle droit), les deux parties se confondent en un *cercle*, qui est pour ainsi dire *double*. Il est *biquadratique*, mais *carré* d'une forme quadratique. Dans l'analyse géométrique, il existe des *lignes multiples* aussi bien que des points et des tangentes mul-

tiples. Ce sont ces diverses multiplicités qui amènent des *abaissements* réels quant aux formes géométriques, mais qui ne sont qu'apparents sous le point de vue analytique. Il reste donc encore quelque chose à éclaircir dans cette question.

NOTE SUR LES SECTIONS TORIQUES;

PAR M. GARLIN,
Docteur ès Sciences.

M. A. Serret a le premier fait connaître la véritable nature des sections toriques parallèlement à l'axe (*Journal de Mathématiques*, t. VIII, p. 495; 1843). Je vais parler ici d'une propriété qui ne se trouve consignée nulle part, à ce que je sache. Elle consiste en ce qu'en coupant un tore déterminé par un plan parallèle à l'axe, la courbe d'intersection est la même que celle qu'on obtient en cherchant le lieu géométrique des sommets des angles quelconques circonscrits à une certaine ellipse, dont il est facile de déterminer les éléments. Et réciproquement, la courbe du lieu des sommets des angles quelconques circonscrits à une ellipse déterminée peut être obtenue en coupant un tore dont on détermine les éléments par un plan dont on assigne la position.

Pour le faire voir, rappelons-nous que l'équation du tore est l'équation du quatrième degré

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-d\right)^2+z^2=\mathrm{R}^2,$$

R étant le rayon de la surface génératrice, d la distance de son centre à l'axe de révolution, et l'origine des coordonnées le pied de la perpendiculaire abaissée de ce centre sur l'axe.

Soit

$$y = p$$

l'équation du plan sécant; la courbe d'intersection qui se projette en vraie grandeur sur le plan XZ a pour équation rationnelle dans ce plan

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + z^2)^2 + 2(p^2 - d^2 - R^2)x^2 + 2(p^2 + d^2 - R^2)z^2 \\ \qquad - 4d^2p^2 + (d^2 + p^2 - R^2)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Or la courbe relative aux sommets des angles α circonscrits à une ellipse dont les demi-axes sont a et b, a pour équation, en posant $\tang \alpha = k$,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + z^2)^2 - 2\left(a^2 + b^2 + \frac{2a^2}{k^2}\right)x^2 - 2\left(a^2 + b^2 + \frac{2b^2}{k^2}\right)z^2 \\ \qquad + (a^2 + b^2)^2 + \frac{4a^2b^2}{k^2} = 0. \end{array} \right.$$

Supposons d'abord qu'on connaisse a, b et α Il s'agit d'abord de voir si par l'identification des équations (1) et (2) on peut trouver des valeurs réelles et finies pour les éléments d, R et p relatifs au tore et au plan sécant.

Les équations de l'identification sont

$$d^2 + R^2 - p^2 = a^2 + b^2 + \frac{2a^2}{k^2},$$

$$R^2 - d^2 - p^2 = a^2 + b^2 + \frac{2b^2}{k^2},$$

$$(p^2 + d^2 - R^2)^2 - 4d^2p^2 = (a^2 + b^2)^2 + \frac{4a^2b^2}{k^2}.$$

Retranchant la deuxième de ces équations de la première, on trouve

$$d^2 = \frac{a^2 - b^2}{k^2}.$$

Ainsi, en posant comme d'ordinaire

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

la distance de l'axe de révolution au centre du cercle générateur est égale à $c \cot\alpha$.

La deuxième et la troisième équation donnent

$$p = \frac{b^2}{c \sin\alpha};$$

la position du plan sécant est ainsi déterminée.

D'ailleurs la première équation donne pour le rayon de la circonférence génératrice, en y substituant les valeurs déjà trouvées,

$$R = \frac{a^2}{c \sin\alpha}.$$

Réciproquement, le tore étant défini d'avance, ainsi que la position du plan sécant, les trois équations de l'identification servent à déterminer les dimensions de l'ellipse et l'angle α.

En particulier, si l'angle est droit, le tore est remplacé par la sphère, car $d = 0$, et les valeurs

$$p = \frac{b^2}{c}, \quad R = \frac{a^2}{c},$$

font connaître le rayon de cette sphère et la position du petit centre égal à celui du lieu géométrique.

L'équation (2) du quatrième degré à puissances paires n'est pas décomposable en général en facteurs du deuxième degré. On s'en assure en identifiant le premier membre au produit de deux polynômes du deuxième degré en x et y, et l'on voit que l'on n'a de coefficients réels pour ces polynômes que quand $a = b$, c'est-à-dire quand l'ellipse devient un cercle. Alors on trouve deux circonférences pour le lieu : l'une se rapporte à l'angle donné et l'autre à l'angle supplémentaire. C'est effectivement ce qu'on trouve quand on traite directement la question pour le

cercle. On peut encore démontrer l'impossibilité de la décomposition en facteurs, en résolvant l'équation par rapport à z, et cherchant alors la condition pour que la quantité placée sous le radical soit un carré parfait.

Note. Pour l'hyperbole équilatère, le lieu des sommets des angles égaux circonscrits est une cassinoïde (*).

MÉMOIRE SUR LES POLAIRES INCLINÉES;

PAR M. DEWULF.

I. Désignons, avec M. Steiner, une courbe plane donnée par une équation de degré n entre x et y par C^n, et un faisceau de courbes passant par n^2 points par F^n.

Si d'un point P pris dans le plan d'une courbe C^n nous menons toutes les droites qui coupent la courbe sous un angle donné, tous les points où le faisceau de droites coupe la courbe sous l'angle donné sont sur une courbe C^n_1 que je nomme *première polaire inclinée* du point P relativement à la courbe C^n. Si nous prenons la première polaire inclinée du point P relativement à C^n_1, nous trouverons une courbe C^n_2 que je nommeraî *deuxième polaire inclinée* de P relativement à C^n. Et ainsi de suite. La $p^{\text{ième}}$ polaire inclinée de P relativement à C sera désigné par C^n_p.

II. Soient

$$F(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe C^n rapportée à des axes rectangulaires, et x', y' les coordonnées d'un point de cette courbe.

L'équation générale des droites qui passent par ce

(*) Réimpression *memoriæ lapsu* (t. XIII, p. 415).

point est

(1) $$y - y' = m(x - x'),$$

et l'équation de la tangente en ce point à C^n est

(2) $$(y - y')\frac{dF}{dy'} + (x - x')\frac{dF}{dx'} = 0.$$

Pour que ces droites (1) et (2) forment un angle dont la tangente trigonométrique soit k, il faut que l'on ait

$$\frac{dF}{dx'} + m\frac{dF}{dy'} = k\left(\frac{dF}{dy'} + m\frac{dF}{dx'}\right).$$

De cette équation nous tirons

$$m = -\frac{\frac{dF}{dx'} - k\frac{dF}{dy'}}{\frac{dF}{dy'} + k\frac{dF}{dx'}}.$$

Et l'équation générale de la droite qui, passant par un point (x', y') de la courbe C^n, fait avec elle un angle constant dont la tangente est k, est

$$(y - y')\left(\frac{dF}{dy'} + k\frac{dF}{dx'}\right) + (x - x')\left(\frac{dF}{dx'} - k\frac{dF}{dy'}\right) = 0.$$

Nommons (α, β) les coordonnées d'un point fixe P. L'équation de la première polaire inclinée du point P par rapport à C sera

(3) $$(\beta - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0,$$

x et y désignant maintenant les coordonnées courantes de la première polaire inclinée C_1^n.

Cette équation est du degré n. *Donc, par un point quelconque* P *du plan d'une courbe* C^n, *ou peut mener*

n^2 *droites qui coupent cette courbe sous un angle constant, et les pieds de ces* n^2 *droites sont sur une courbe de degré* n.

III. Si $k = 0$, le degré de l'équation (3) s'abaisse d'une unité, et le théorème I se transforme en ce théorème bien connu :

Par tout point du plan d'une courbe C^n *on peut mener* $n(n-1)$ *tangentes à cette courbe, et les points de contact se trouvent sur une courbe de degré* $n-1$.

Si $k = \infty$, le degré de l'équation ne s'abaisse pas, et le théorème I nous donne, comme cas particulier, ce théorème connu :

Par tout point du plan d'une courbe C^n, *on peut memener* n^2 *normales, et les pieds de ces normales se trouvent sur une courbe de degré* n.

Puisque toute normale à une courbe C^n est tangente à la développée de cette courbe, nous pouvons conclure du théorème précédent que la développée d'une courbe C^n est de la classe n^2

IV. Le faisceau de n^2 droites qui coupe C^n sous un angle constant coupe cette courbe en n^3 points, et comme n^2 de ces points se trouvent sur une courbe de degré n, les $n^3 - n^2$ autres points d'intersection se trouvent sur une courbe de degré $n^2 - n$.

V. Discutons l'équation générale de la courbe C^n. Pour cela, mettons-la sous la forme

$$\frac{dF}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0.$$

Nous pouvons satisfaire à cette équation en posant

1°: $\dfrac{dF}{dx} = 0$ et $\dfrac{dF}{dy} = 0$,

2°. $\frac{dF}{dx} = 0$ et $y - \beta - k(x - \alpha) = 0$.

3°. $\frac{dF}{dy} = 0$ et $y - \beta + \frac{1}{k}(x - \alpha) = 0$.

4°. $y - \beta - k(x - \alpha) = 0$ et $y - \beta + \frac{1}{k}(x - \alpha) = 0$.

1°. En posant

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

l'équation de C_1^n est satisfaite, quelles que soient les valeurs de α et β.

Donc, *toutes les premières polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe* C^n *passent par* $(n - 1)^2$ *points fixes.*

2°. En posant

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad y - \beta - k(x - \alpha) = 0,$$

l'équation de C_1^n est satisfaite, quelle que soit la valeur de $\frac{dF}{dy}$.

Donc les premières polaires inclinées d'un point donné P par rapport à toutes les courbes dont l'équation a même dérivée par rapport à x, ont $(n - 1)$ points fixes communs, tous en ligne droite avec le point P. La direction de cette droite varie avec k.

3°. En posant

$$\frac{dF}{dy} = 0 \quad \text{et} \quad y - \beta + \frac{1}{k}(x - \alpha) = 0,$$

l'équation de C_1^n est satisfaite, quelle que soit la valeur de $\frac{dF}{dy}$. Nous arrivons à un théorème analogue au précédent.

De ces deux théorèmes résulte celui-ci :

Les polaires inclinées d'un point P *par rapport à toutes les courbes représentées par l'équation*

$$F(x, y) + C = 0,$$

C *étant une constante arbitraire, se coupent en* 2 (n — 1) *points fixes distribués* n — 1 *à* n — 1 *sur deux droites rectangulaires qui se coupent en* P, *mais dont la direction varie avec* k.

4°. En posant

$$y - \beta - k(x - \alpha) = 0 \quad \text{et} \quad y - \beta + \frac{1}{k}(x - \alpha) = 0,$$

ou

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta,$$

l'équation de la première polaire est satisfaite.

Donc la première polaire d'un point par rapport à une courbe passe par ce point.

VI. Remarquons encore que les termes du degré le plus élevé en xy de l'équation de C_1^n sont indépendants de α, β, k; par conséquent, la direction des asymptotes de C_1^n ne varie pas avec α, β, k, ce qui nous donne ce théorème :

Toutes les premières polaires inclinées de tous les points du plan d'une courbe C^n *passent par* n *points fixes situés à l'infini.*

VII. Si nous remarquons que les $(n - 1)^2$ points fixes dont il est question dans le théorème (V, 1°) sont les $(n - 1)^2$ pôles par rapport à C^n de la droite située à l'infini, nous pourrons déduire des théorèmes (V, 1°) et (VI) ce théorème très-général :

P_1 *et* P_2 *étant deux points quelconques du plan d'une courbe* C^n, *leurs premières polaires inclinées par rapport*

à C^n *ont en commun* $n^2 - n + 1$ *points fixes, savoir les* $(n-1)^2$ *pôles de la droite située à l'infini, pôles pris relativement à* C^n *et* n *points situés à l'infini.*

Un cas particulier de ce théorème, celui qui correspond à $k = \infty$, a déjà été énoncé par M. Steiner.

VIII. Posons

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta = 0,$$

et l'équation de C_1^n devient

$$\frac{dF}{dy}(-y + kx) + \frac{dF}{dx}(-x - ky) = 0.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$y\frac{dF}{dy} + x\frac{dF}{dx} + k\left(y\frac{dF}{dx} - x\frac{dF}{dx}\right) = 0.$$

Nommons première polaire *ordinaire* la première polaire inclinée qui correspond à $k = 0$, et première polaire *normale* celle qui correspond à $k = \infty$.

La première polaire de l'origine est

$$y\frac{dF}{dy} + x\frac{dF}{dx} = 0. \tag{1}$$

La première polaire normale de l'origine est

$$y\frac{dF}{dx} - x\frac{dF}{dy} = 0. \tag{2}$$

La courbe représentée par l'équation

$$y\frac{dF}{dy} + x\frac{dF}{dx} + \lambda\left(y\frac{dF}{dx} - x\frac{dF}{dy}\right) = 0$$

passe par tous les points d'intersection des courbes (1) et (2); or cette équation est précisément celle d'une première polaire inclinée de l'origine.

Donc : *Toutes les premières polaires inclinées d'un point par rapport à* C^n *passent par les* n (n — 1) *points d'intersection de la première polaire (ordinaire) et de la première polaire normale de ce point par rapport à* C^n.

IX. De l'équation (1) (n° VIII), tirons la valeur de $\frac{x}{y}$, et posons

$$\frac{y}{x} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = -\frac{a}{b}.$$

De l'équation (2) du même paragraphe nous déduirons

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}.$$

Donc *la première polaire ordinaire et la première polaire normale se coupent à angle droit à l'origine.*

L'équation (3) nous donne

$$\frac{y}{x} = -\frac{\frac{dF}{dx} - \lambda\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dy} + \lambda\frac{dF}{dx}} = -\frac{a - \lambda b}{b + \lambda a}.$$

Donc *la première polaire inclinée, dont le coefficient est* k *d'un point* P, *y coupe la première polaire du même point sous un angle dont la tangente est* k.

X. Soient

$$F(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

les équations de deux courbes de degré n.

$$F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0 \tag{1}$$

sera l'équation générale des courbes de degré n qui passent par les n^2 points déterminés par $F = 0$ et $f = 0$.

La première polaire inclinée d'un point $\alpha\beta$ par rapport à l'une quelconque des courbes du faisceau (1) sera représentée par l'équation générale

$$(\beta - y)\left[\frac{dF}{dy} + \lambda\frac{df}{dy} - k\left(\frac{dF}{dx} + \lambda\frac{df}{dx}\right)\right]$$
$$+ (\alpha - x)\left[\frac{dF}{dx} + \lambda\frac{df}{dx} - k\left(\frac{dF}{dy} + \lambda\frac{df}{dy}\right)\right] = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(\beta - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right)$$
$$+ \lambda\left[(\beta - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + (\alpha + x)\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right) = 0.\right.$$

Cette équation est satisfaite, quelle que soit la valeur de λ, si l'on pose

$$(\beta - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0$$

et

$$(\beta - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right) = 0.$$

Ces équations représentent précisément les premières polaires inclinées du point (α, β) par rapport aux courbes $F = 0$ et $f = 0$.

De là ce théorème :

Les premières polaires inclinées d'un point P *par rapport à un faisceau* F^n *forment un faisceau* φ^n *homographique au premier, et les* n^2 *points fixes du faisceau* φ^n *sont donnés par les intersections des premières polaires inclinées du point* P *par rapport à deux quelconques des courbes du faisceau* F^n.

XI. Soit toujours la courbe C^n représentée par

$$F(x, y) = 0$$

et supposons que le point (α, β) dont nous prenons la première polaire inclinée par rapport à C^n, parcoure une droite

$$(1) \qquad y = Ax + B.$$

Nous aurons la relation

$$\beta = A\alpha + B,$$

qui nous permettra d'éliminer β de l'équation de C^n_1 qui deviendra ainsi

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \left[A\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + \frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right]\alpha + B\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) \\ \qquad -y\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - x\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation sera satisfaite, quelle que soit la valeur de α, si nous posons

$$(3) \qquad A\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + \frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy} = 0$$

et

$$(4) \qquad (B - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - x\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Donc, quand un point P parcourt une droite, sa première polaire inclinée par rapport à une courbe C^n tourne autour de $n(n-1)$ points *fixes*, que nous nommons *points polaires inclinés de la droite par rapport à* C^n. A chaque point de la courbe ne correspond qu'une courbe, et réciproquement. Donc les points de la droite à la courbe du faisceau de polaires inclinées se correspondent anharmoniquement.

XII. Voyons quelle est la position des $n(n-1)$ points fixes du faisceau trouvé dans le paragraphe précédent.

L'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$\frac{dF}{dy}(A-k)+\frac{dF}{dx}(1+Ak)=0,$$

d'où

$$(a)\qquad \frac{dF}{dx}=-\frac{dF}{dy}\left(\frac{A-k}{1+Ak}\right).$$

L'équation (4) peut se mettre sous la forme

$$(b)\qquad \frac{dF}{dx}[k(B-y)-x]+\frac{dF}{dy}[B-y-kx]=0.$$

De ces deux équations, nous tirons

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{dF}{dy}(A-k)[(B-y)k-x]\\ &+\frac{dF}{dy}(1+Ak)(B-y-kx)=0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation avec l'une des équations précédentes détermine les $n(n-1)$ points.

Or l'équation (c) est satisfaite si nous posons

$$\frac{dF}{dy}=0,$$

ce qui entraîne, vu l'équation (a),

$$\frac{dF}{dx}=0.$$

Ainsi parmi les $n(n-1)$ points dont nous cherchons la position se trouvent les $(n-1)^2$ pôles de la droite située à l'infini pris par rapport à C^n, ce qui était facile à prévoir.

L'équation (c) est encore satisfaite en posant

$$(A-k)[k(B-y)-x]-(1+Ak)(B-y-kx)=0,$$

ou, en réduisant,

$$y = Ax + B,$$

ce qui prouve que parmi les $n(n-1)$ points fixes, il y en a n sur la droite donnée.

Si la droite sur laquelle se meut le point P passe à l'infini, c'est-à-dire si $B = \infty$, l'équation (2) (n° XI) devient

$$\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx} = 0.$$

C'est-à-dire, *que tous les points d'une courbe* C^n *par où l'on peut mener des droites parallèles à une droite donnée et coupant la courbe sous un angle donné sont sur une courbe de degré* $n-1$. Cette courbe ne varie pas avec la direction des droites, mais elle varie avec l'angle sous lequel les droites doivent couper la courbe.

XIII. Soit le faisceau F^m représenté par $F + \lambda f = 0$, et supposons que le point (α, β) parcoure la droite

$$(1) \qquad y = Ax + B.$$

Nous aurons la relation

$$\beta = A\alpha + B$$

qui nous permettra d'éliminer β de l'équation de la polaire inclinée du point par rapport au faisceau F^m. Cette équation deviendra ainsi

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} &A\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + \left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) \\ &+ \lambda\left[A\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + \frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right]\alpha \end{aligned}\right\} \\ &+ (B-y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - x\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) \\ &+ \lambda\left[(B-y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) - x\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right)\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

Cette équation est satisfaite, quelle que soit la valeur de α, si nous posons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)+\frac{d\mathrm{F}}{dx}-k\frac{d\mathrm{F}}{dy} \\ &+\lambda\left[\mathrm{A}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)+\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right]=0, \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{B}-y)\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)-x\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}-k\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right) \\ &+\lambda\left[(\mathrm{B}-y)\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)-x\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\right]=0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations déterminent pour chaque valeur de λ les $n(n-1)$ points polaires inclinés de la droite.

Quand λ varie de $+\infty$ à $-\infty$, le système des points polaires inclinés décrit un lieu que nous trouverons en éliminant λ entre les équations (3) et (4).

Cette élimination nous donne

$$(5)\qquad (\mathrm{B}-y+\mathrm{A}x)\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{df}{dx}\right)=0.$$

Donc *les* n (n — 1) *points polaires inclinés d'une droite relativement à une courbe* C^n *d'un faisceau* F^n *décrivent la droite donnée et la courbe*

$$\frac{d\mathrm{F}}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{df}{dx}=0,$$

de degré 2 (n — 1) *quand la courbe* C^n *tourne autour des* n^2 *points fixes du faisceau.*

La fin prochainement.

NOTE SUR LES INTÉRÊTS INSTANTANÉS.

1. *Lemme.* $\left(1+\frac{s}{\infty}\right)^{\infty}=e^{s}$.

2. Soient $\frac{s}{t}$ l'intérêt de l'*unité* au bout de l'*unité* de temps, t un nombre *entier* d'unités de temps et s un nombre positif quelconque; au bout du temps t, l'unité produit le capital $\left(1+\frac{s}{t}\right)^{t}$. Supposons que, s restant fini, t devienne infini, alors l'unité de temps devient infiniment petite, et l'intérêt $\frac{s}{t}$ aussi infiniment petit représente l'intérêt au bout de ce temps infiniment petit, et ces intérêts ajoutés les uns aux autres produisent le nombre fini s au bout du temps t, et, d'après le lemme, le capital s'élève au bout du temps t à e^{s}.

3. L'exemple suivant donne une idée claire de ces intérêts instantanés.

Supposons qu'un vase de 1 mètre cube de capacité se remplisse entièrement d'un liquide au bout du temps T au moyen d'un robinet qui laisse écouler ce liquide par gouttes égales et d'une manière continue; que ce même vase soit rempli au bout du temps T_1 au moyen d'un autre robinet. Les grosseurs infiniment petites des deux espèces de gouttes sont entre elles comme $T : T_1$; ces grosseurs représentent des intérêts instantanés qui, quoique tous deux infiniment petits, ont un rapport géométrique fini.

4. En général, lorsque deux grandeurs croissent *continuellement,* l'une d'infiniment petits tous égaux entre

eux et l'autre d'infiniment petits croissant en rapport géométrique, les premières grandeurs sont les logarithmes des secondes; les bases des logarithmes dépendent de la grandeur des accroissements égaux.

SOLUTION DE LA QUESTION 427

(voir t. XVII, p. 45);

PAR M. A. CHANSON,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Etant donnés un angle A formé par deux grands cercles et un point O, mener par ce point un troisième cercle qui forme avec les deux autres un triangle sphérique de surface donnée.

Soit ABC le triangle cherché. J'imagine son polaire A'B'C', dans lequel je connais la base B'C' et la somme des deux autres côtés. D'ailleurs le point A' se trouve sur un cercle décrit de O comme pôle avec 90 degrés pour distance polaire. Le point A' connu, le problème serait résolu. On peut donc le ramener au suivant que nous résoudrons à part (II) :

Étant donnés un grand cercle MN *et deux points* B' *et* C', *trouver sur ce grand cercle un point* K *tel, que* KB' + KC' = *un arc donné.*

Soit K le point cherché : prolongeons B'K d'une longueur KL = KC'. Le point L se trouve sur un petit cercle décrit du point B' comme pôle, avec une distance polaire égale à la somme donnée. D'ailleurs c'est le point de contact d'un cercle tangent à ce dernier et passant par les deux points C', C'', symétriques par rapport à l'arc MN. Si donc nous faisons passer un petit cercle quelconque par les points C' et C'' qui coupera le petit cercle décrit

de $\hat{B}'$ comme pôle en deux points S' et S, et que nous menions les deux cordes d'intersection $C'C''$ et $S'S$, elles se couperont en un point P qui appartient aussi à la tangente qui serait commune au cercle cherché et au cercle décrit de B' comme pôle.

Il est facile en effet de démontrer sur la sphère comme sur le plan que les trois cordes d'intersection de trois petits cercles pris deux à deux se coupent en un même point. Le théorème sur lequel on s'appuie sur le plan pour démontrer cela, a son analogue sur la sphère.

Si d'un point A (III) on mène des arcs de grand cercle sécant à un petit cercle, on a la relation

$$\text{tang}\frac{AB}{2}\cdot\text{tang}\frac{AC}{2}\cdot\text{tang}\frac{AD}{2}\cdot\text{tang}\frac{AE}{2}=\text{constante.}$$

Il nous suffit donc, pour achever le problème, de mener par le point P un arc tangent au cercle décrit de B' comme pôle; joignant le point de contact T' au point B', le point S d'intersection avec l'arc MN sera le point cherché.

On voit que généralement le problème aura deux solutions, et pour le résoudre il n'y aura qu'à répéter synthétiquement les constructions précédentes.

SOLUTION DE LA QUESTION 427

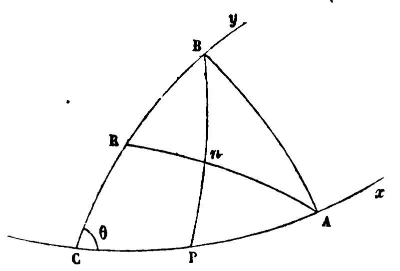
(voir t. XVII, p. 45, n° 9);

PAR M. P. CHALLIOT,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Si dans un triangle sphérique ABC on donne un angle C compris entre deux côtés variables, mais dont la somme des tangentes est constante, le lieu de la rencontre des trois hauteurs dans chaque triangle est une circonférence

de grand cercle; si C′ est la somme des côtés qu'on donne constante, le lieu sera une ellipse sphérique.

(VANNSON.)



1°. Prenons CB et CA de façon que

$$\text{tang}\,\text{CB} + \text{tang}\,\text{CA} = \text{tang}\,m;$$

menons deux des hauteurs BP et AR. Soient x, y les coordonnées sphériques d'un point n du lieu; l'équation du grand cercle sera

$$\frac{\text{tang}\,x}{\text{tang}\,\text{CP}} + \frac{\text{tang}\,y}{\text{tang}\,\text{BC}} = 1 \quad (\textit{voir}\ \text{t. XVII, p. 71}).$$

Pour abréger, désignons les tangentes par une seule lettre. Posons

$$\text{tang}\,\text{CA} = a, \quad \text{tang}\,\text{CB} = b,$$
$$\text{tang}\,\text{CP} = c, \quad \text{tang}\,\text{CR} = d.$$

L'équation du grand cercle BP sera alors

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1,$$

celle de l'arc AR sera

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{d} = 1.$$

Mais dans les deux triangles rectangles BCP, ACR, on a

$$c = b\cos\theta, \quad d = a\cos\theta;$$

les deux équations deviennent donc

$$\frac{x}{b\cos\theta}+\frac{y}{b}=1,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a\cos\theta}=1;$$

on en tire

$$b=\frac{y\cos\theta+x}{\cos\theta},\quad a=\frac{x\cos\theta+y}{\cos\theta}.$$

D'après l'hypothèse, on a

$$a+b=m;$$

remplaçant a et b par leurs valeurs,

$$x+y=\frac{m\cos\theta}{1+\cos\theta},$$

équation d'un grand cercle coupant les deux axes à une distance de l'origine marquée par $\frac{m\cos\theta}{1+\cos\theta}$.

2°. Supposons que ce soit la somme des côtés qu'on donne constante,

$$a+b=m,$$

nous avons trouvé ci-dessus, en rétablissant les tangentes,

$$\text{tang}\, b=\frac{\text{tang}\, y\cos\theta+\text{tang}\, x}{\cos\theta},\quad \text{tang}\, a=\frac{\text{tang}\, x\cos\theta+\text{tang}\, y}{\cos\theta};$$

portant dans l'équation

$$\text{tang}\, m=\frac{\text{tang}\, a\,\text{tang}\, b}{1-\text{tang}\, a\,.\,\text{tang}\, b},$$

on aura

$$\text{tang}\, m=\frac{\dfrac{(\text{tang}\, y+\text{tang}\, x)(1+\cos\theta)}{\cos\theta}}{1-\dfrac{(\text{tang}\, y\cos\theta+\text{tang}\, x)(\text{tang}\, x\cos\theta+\text{tang}\, y)}{\cos^2\theta}},$$

en désignant les tangentes par une seule lettre

$$m = \frac{(x+y)(1+\cos\theta)\cos\theta}{\cos^2\theta - xy(1+\cos^2\theta) - (x^2+y^2)\cos\theta},$$

équation du deuxième degré. Donc le lieu demandé est une ellipse sphérique.

SOLUTION DE LA QUESTION 481

(voir t. XVIII, p. 286);

PAR M. CHARDONNET (DE CHALON-SUR-SAÔNE).

Solution analytique.

L'équation de l'hyperboloïde donné rapportée à ses axes et à son centre sera

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2.$$

Soient x', y', z' les coordonnées du sommet du cône considéré; x_1, y_1, o celles d'un point quelconque du cercle de gorge; les équations de la génératrice du cône passant en ce point seront

$$x - x' = \frac{x' - x_1}{z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y_1}{z'}(z - z').$$

On en tirera les valeurs suivantes de x_1 et y_1

$$x_1 = \frac{zx' - xz'}{z - z'}, \quad y_1 = \frac{zy' - yz'}{z - z'},$$

qui, portées dans l'équation du cercle de gorge, donneront pour celle du cône

$$(zx' - xz')^2 + (zy' - yz')^2 = a^2(z - z')^2,$$

dans laquelle je fais $x = 0$ pour avoir l'équation de la section par le plan des yz.

L'une des conditions pour que cette équation représente un cercle est que le coefficient du rectangle des variables soit nul. Je fais donc $y' = 0$, ce qui revient à amener le sommet du cône dans le plan des xz. L'équation de la section devient alors

$$z^2(x'^2 - a^2) + z'^2 y^2 + 2a^2 zz' = a^2$$

ou

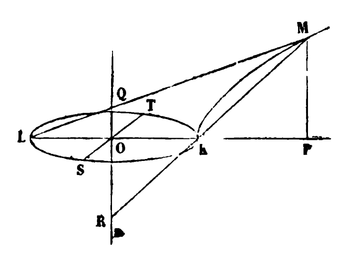
$$y^2 + z^2 + 2\frac{a^2}{z^2} z = a^2,$$

équation d'un cercle dont le centre est sur l'axe des z. On obtiendra donc les deux systèmes de sections circulaires qu'admet le cône considéré, en le coupant par des plans perpendiculaires à l'axe des z ou à l'axe des x.

Note. Mon fils Alfred m'a remis une solution analytique identique.

Solution géométrique (Chardonnet).

On sait que toute section circulaire d'un cône oblique à base circulaire est perpendiculaire à la section principale, et que lorsqu'une section elliptique est perpendiculaire à la section principale, ses axes sont, l'un la commune intersection de son plan avec le plan principal, et



l'autre une perpendiculaire à cette ligne. Cela posé,

soient O le centre du cercle de gorge, M le sommet du cône, K, L les points où le méridien du point M rencontre ce cercle. Menons les génératrices ML, MK du cône; soient Q, R les points où elles rencontrent l'axe non transverse de l'hyperboloïde, P le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur le diamètre LK prolongé, S, T les intersections d'un autre diamètre perpendiculaire à ce dernier avec le cercle de gorge. Les triangles semblables LOQ et LPM, KMP et KOR donneront

$$\frac{\text{MP}}{\text{OQ}}=\frac{\text{LP}}{\text{OL}},\quad \frac{\text{MP}}{\text{OR}}=\frac{\text{KP}}{\text{KO}};\quad \frac{\overline{\text{MP}}^2}{\text{OQ}\times\text{OR}}=\frac{\text{LP}\times\text{KP}}{\overline{\text{OK}}^2},$$

et, en remarquant que

$$\overline{\text{MP}}^2=\text{LP}\times\text{KP},$$

il vient

$$\text{OQ}\times\text{OR}=\overline{\text{OK}}^2=\overline{\text{OS}}^2;$$

donc la section plane QSRT est un cercle. C. Q. F. D.

THÉORÈME SUR LES ROULETTES;

PAR M. P. SERRET.

1. *Si l'on considère l'arc de roulette engendré par un point* o *invariablement lié à une courbe mobile, pendant que l'arc* MN *de cette courbe roule sans glisser sur une droite; et l'arc* conjugué *de la courbe-podaire, lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du même point* o (*regardé comme immobile*) *sur les diverses tangentes de l'arc* MN (*devenu fixe*) : *ces deux arcs conjugués auront même longueur.*

Ce théorème, qui est peut-être nouveau, donne lieu à plusieurs conséquences : ainsi, un arc quelconque de la

podaire d'une circonférence par rapport à un point de son plan est mesuré par une portion de droite, ou par un arc d'ellipse, suivant que ce point appartient ou non à la circonférence; inversement, un arc quelconque de la roulette produite par le roulement sur une droite d'un arc d'ellipse ou de parabole, le point décrivant étant le foyer, est égal à un arc de cercle ou à une portion de droite.

Pour le démontrer, désignons par ds, ds', $d\sigma$ les arcs élémentaires correspondants de la courbe MN, de la podaire M'N' et de la roulette engendrée par le point O; soient r, r' les rayons vecteurs correspondants OM, OM', et ρ lè rayon de courbure en M de la courbe MN. D'après une *expression* connue, on a

$$d\sigma = \frac{r\,ds}{\rho};$$

une formule due à Euler, $\rho = \frac{r\,dr}{dr'}$, peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dr'}{r.dr};$$

enfin, l'égalité connue des angles sous lesquels les rayons vecteurs OM, OM' coupent la courbe MN et la podaire M'N', fournit cette dernière relation : $\frac{dr}{ds} = \frac{dr'}{ds'}$, ou

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{ds'}{ds}.$$

Or si l'on multiplie membre à membre ces trois égalités, on trouve, en simplifiant, la relation $d\sigma = ds'$, qui démontre le théorème énoncé.

Note du Rédacteur. Le théorème a été énoncé et démontré par M. Steiner (Crelle, t. XXI, p. 35; 1846) et ensuite par M. Mannheim (l'*Institut*, 24 février 1858) qui m'a communiqué ce renseignement.

QUESTIONS D'EXAMEN (ECOLE POLYTECHNIQUE).

Condition pour que deux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *se coupent sous un angle droit. Lieu géométrique du point d'intersection.*

En désignant par α et β deux angles quelconques, les équations des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde sont, pour l'un des deux systèmes,

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\alpha+\sin.\alpha,$$

$$\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\alpha-\cos.\alpha;$$

et pour l'autre,

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\beta+\sin\beta,$$

$$\frac{y}{b}=-\frac{z}{c}\sin\beta+\cos\beta.$$

Les coordonnées d'un point commun à deux génératrices de systèmes différents sont déterminées par

$$\frac{z'}{c}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{y'}{b}=\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\right)\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{x'}{a}=\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\right)\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Le carré de la distance de ce point au centre de la surface a pour expression

$$(1)\quad x'^2+y'^2+z'^2=\frac{a^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-6)+b^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-6)+c^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+6)}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+6)}.$$

Quand $\sin\frac{1}{2}(\alpha+6)=0$, les deux génératrices sont parallèles. La condition pour qu'elles soient perpendiculaires est, d'après une formule connue,

$$\frac{a^2}{c^2}\cos\alpha\cos 6-\frac{b^2}{c^2}\sin\alpha\sin 6+1=0,$$

ou

$$(2)\qquad a^2\cos\alpha\cos 6-b^2\sin\alpha\sin 6+c^2=0.$$

De cette dernière relation on peut conclure que la *distance du centre de l'hyperboloïde au point d'intersection de deux génératrices rectangulaires est invariable.*

Car, en observant qu'on a, quels que soient α et 6,

$$\cos\alpha\cos 6=\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-6)-\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+6),$$

$$-\sin\alpha\sin 6=\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-6)-\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+6),$$

$$1=\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+6)+\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+6),$$

la relation (2) devient

$$a^2\left[\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-6)-\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+6)\right]$$
$$+b^2\left[\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-6)-\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+6)\right]$$
$$+c^2\left[\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+6)+\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+6)\right]=0$$

et donne successivement :

$$a^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-6)+b^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-6)+c^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+6)$$
$$=(a^2+b^2-c^2)\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+6);$$

$$\frac{a^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-6)+b^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-6)+c^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+6)}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+6)}=a^2+b^2-c^2.$$

Il en résulte, en ayant égard à l'équation (1),

$$x'^2+y'^2+z'^2=a^2+b^2-c^2.$$

D'après cela, on voit que le lieu géométrique des points d'intersection des génératrices rectangulaires est celui des points communs à l'hyperboloïde et à la sphère

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2.$$

Pour que le rayon de cette sphère ait une valeur réelle différente de zéro, il faut d'abord que c^2 soit moindre que a^2+b^2. Quant à l'existence de points communs à la sphère et à l'hyperboloïde, elle exige que le rayon de la sphère soit au moins égal à la moitié du plus petit des deux axes de l'ellipse de *gorge* représentée par l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, puisque la plus courte distance du centre de l'hyperboloïde à un point de la surface, est précisément égale à la moitié de cet axe. Par conséquent, en supposant $b<a$, la condition de l'intersection de la sphère et de l'hyperboloïde est $a^2+b^2-c^2>b^2$, ou $c<a$. S'il y avait égalité entre a et c, la sphère serait tangente à l'hyperboloïde aux deux extrémités de l'axe $2b$, et ces deux points seraient les seuls où deux génératrices rectilignes de la surface se couperaient sous un angle droit.

G.

DÉCOMPOSITION

De la fraction rationnelle irréductible $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+6^2]^n}$ en fractions simples de la forme $\frac{ax+b}{[(x-\alpha)^2+6^2]^n}$, $\frac{a'x+b'}{[(x-\alpha)^2+6^2]^{n-1}}$,....

Divisez $f(x)$ par $(x-\alpha)^2+6^2$; le reste de cette division sera le numérateur de la première fraction cherchée. Car la division donnera lieu à une égalité de la forme

$$f(x)=[(x-\alpha)^2+6^2]f_1(x)+ax+b;$$

d'où

$$\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+6^2]^n}=\frac{ax+b}{[(x-\alpha)^2+6^2]^n}+\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+6^2]^{n-1}}.$$

En divisant de même le quotient $f_1(x)$ par $(x-\alpha)^2+6^2$, le reste de cette seconde division sera le numérateur $a'x+b'$ de la seconde fraction cherchée. Et ainsi de suite. G.

DÉTERMINATION

Du centre et du rayon de la sphère représentée par l'équation générale

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2+2yz\cos XZ+2xz\cos XZ+2xy\cos XY \\ \qquad +2cx+2c'y+2c''z+d=0. \end{array}\right.$$

Le centre est à l'intersection de trois plans respectivement perpendiculaires aux axes des coordonnées X, Y, Z, à des distances de l'origine égales à $-c$, $-c'$, $-c''$. Le carré du rayon s'obtient en retranchant le terme indé-

pendant d du carré de la distance du centre à l'origine des coordonnées. Quand le résultat de cette soustraction est nul, ou négatif, l'équation (1) représente un point, ou une surface imaginaire. G.

NOTE

Sur le théorème segmentaire de Carnot et conséquences sur les tangentes.

On sait que ce théorème consiste dans l'égalité de deux produits segmentaires donnés par les intersections des côtés d'un polygone et d'une courbe algébrique plane.

Lorsque le nombre de côtés du polygone et le degré de la courbe sont tous deux impairs, les deux produits segmentaires ont des signes opposés; dans tout autre cas, ils ont le même signe.

Ainsi, lorsqu'un triangle coupe une droite ou toute autre ligne de degré impair, les produits sont de signes opposés; mais lorsqu'il coupe une conique ou toute autre ligne de degré pair, les produits ont même signe.

Si le triangle ABC touche une conique respectivement aux points c, a, b, le théorème de Carnot donne

$$\overline{Ac}^2 . \overline{Ba}^2 . \overline{Cb}^2 = + \overline{Ab}^2 . \overline{Bc}^2 . \overline{Ca}^2 ;$$

d'où

$$Ac.Ba.Cb = \pm Ab.Bc.Ca;$$

mais le signe — doit être rejeté, car une tangente à une conique ne peut pas couper la conique; donc

$$Ac.Ba.Cb = + Ab.Bc\,Ca.$$

Cela indique que les trois droites qui joignent les sommes et les points de contact des côtés opposés se coupent en un même point.

Si le triangle ABC touche une courbe du troisième degré aux trois points d'*inflexion* c, a, b, on a

$$\overline{Ac}^3 . \overline{Ba}^3 . \overline{Cb}^3 = -\overline{Ab}^3 . \overline{Bc}^3 . \overline{Ca}^3 ;$$

d'où

$$Ac . Ba . Cb = - Ab . Bc . Ca.$$

Ainsi, les trois points d'inflexion a, b, c sont en ligne droite, et par conséquent une courbe du troisième degré ne peut avoir quatre points d'inflexion réels; ils seraient en ligne droite : ce qui est impossible.

2°. Lorsqu'un sommet du polygone est situé à l'infini, chaque produit a un facteur de moins; car on ôte dans les deux produits les segments infinitésimaux qui sont égaux.

3°. Si un sommet est sur la courbe, les deux produits s'anulent; mais au rapport des segments devenus nuls on peut substituer le rapport des sinus des angles que forment les côtés de l'angle inscrit avec la tangente menée par le sommet de cet angle.

On conclut de là que, lorsqu'un polygone est inscrit dans une conique, et qu'on mène une tangente à chaque sommet, le produit des sinus des angles que forment les côtés respectivement avec les tangentes, en allant de droite à gauche, est égal au produit similaire en allant de gauche à droite.

EXERCICES SUR LES COURBES PLANES.

1. $$x^4 - ayx^2 + by^3 = 0,$$

l'origine est un point triple; les tangentes en ce point sont données par l'équation

$$ax^2y = by^3.$$

2. $$x^4 - 2ax^2y + 2x^2y^2 + ay^3 + y^4 = 0,$$

origine point triple; équation des tangentes

$$2x^2y = y^3.$$

3. $$ay^2 - y^3 \pm bx^2 = 0,$$

origine point double et isolé lorsque le signe est positif; équation des tangentes

$$ay^2 \pm bx^2 = 0.$$

4. $$(x^2 - a^2)^2 = ay^2(2y + 3a),$$

$$y = 0, \quad x - a = 0,$$

double point; équation des tangentes

$$4(x - a^2)^2 = 3y^2.$$

$$y = 0, \quad x + a = 0,$$

double point; équation des tangentes

$$4(x + a)^2 = 3y^2.$$

$$x = 0, \quad y + a = 0,$$

double point; équation des tangentes

$$2x^2 = 3(y + a)^2.$$

La courbe ne peut avoir d'autres points multiples.

5. $$(by - cx)^2 = (x - a)^5, \quad x = a, \quad by = ac,$$

point de rebroussement; la tangente rencontre en cinq points *consécutifs*.

6. $$x^4(x + b) = a^3y^2,$$

origine point double; la tangente rencontre en quatre points *consécutifs*. Il existe un point triple à l'infini, au-

quel la droite à l'infini est seulement tangente; la droite $x+b=0$ touche la courbe au point où elle rencontre l'axe des x, et aussi au point d'inflexion à l'infini.

7. $$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=0,$$

ou bien

$$(x^2+y^2+z^2)^3=27x^2y^2z^2,$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0, \\ y^2+z^2=0, \end{array}\right\} \text{ point double; } \quad x=0 \text{ tangente.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=0, \\ x^2+z^2=0, \end{array}\right\} \quad \text{»}$$

$$\left.\begin{array}{l} z=0, \\ z^2+y^2=0, \end{array}\right\} \quad \text{»}$$

Ces six points sont six points de rebroussement. Il y a encore quatre autres points doubles *isolés*, donnés par les équations

$$x\pm y=0,$$
$$x\pm z=0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 472

(voir p. 170);

PAR M. BELLAC,
Élève du lycée de Caen (classe de M. Toussaint).

Les hauteurs d'un tétraèdre sont les génératrices d'un même hyperboloïde à une nappe.

Soient ABCD le tétraèdre, AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 les quatre hauteurs de ce tétraèdre.

Par l'arête AB faisons passer un plan perpendiculaire à la face opposée ACD, il contiendra la hauteur BH_2; de

même par les deux autres arêtes AC, AD aboutissant au même sommet A je fais passer deux plans perpendiculaires aux faces opposées, ils contiennent les hauteurs CH_3, DH_4 : mais ces trois plans se coupent suivant une même droite; donc cette droite rencontre les trois hauteurs BH_2, CH_3, DH_4. Du reste, elle rencontre la quatrième hauteur AH_1, puisqu'elle passe par le point A, qui est commun aux trois plans; il s'ensuit que les quatre hauteurs sont rencontrées par une même droite aboutissant au sommet A. On démontrerait de même qu'elles sont rencontrées par trois autres droites partant des sommets BCD. Les quatre hauteurs sont donc rencontrées par quatre droites, dont deux ne sont pas dans le même plan (car si elles étaient dans le même plan, les hauteurs seraient aussi dans le même plan); donc ces hauteurs sont situées sur un hyperboloïde. C. Q. F. D.

Corollaire. Ceci montre que si l'on construit des parallélipipèdes sur les hauteurs prises trois à trois, les centres de ces parallélipipèdes se confondent en un seul point, qui est le centre de l'hyperboloïde.

Note du Rédacteur. Les projections des trois hauteurs partant de B, C, D sur le plan BCD, se rencontrent en un même point; la perpendiculaire élevée par ce point au plan BCD rencontre donc les trois hauteurs, et aussi la quatrième à l'infini; les quatre faces fournissent donc chacune une droite rencontrant les quatre hauteurs; donc, etc. C'est la démonstration de M. Joachimsthal, et il en déduit que le centre de l'hyperboloïde, le centre de gravité du tétraèdre et le centre de la sphère circonscrite sont sur une même droite.

Il est facile de trouver encore d'autres éléments de l'hyperboloïde.

NOTE SUR UN THÉORÈME DE M. CHASLES;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Dans un Mémoire publié en 1838 (*Journal* de M. Liouville, t. III, p. 102 et suiv.), M. Chasles parvient au théorème suivant :

« Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, le produit des distances d'une cinquième tangente quelconque à deux sommets opposés du quadrilatère, est avec le produit des distances de cette tangente aux deux autres sommets, dans un rapport constant. »

Ensuite, au moyen des propriétés du cône oblique et de ses lignes focales, l'auteur arrive à l'évaluation que voici :

Ce rapport constant est égal à celui que l'on trouverait si l'on prenait les distances de ces mêmes sommets à un foyer de la conique.

Nous allons démontrer ce dernier résultat par les formules où figurent les expressions imaginaires.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées des sommets du quadrilatère, et soit $y = mx + n$ l'équation d'une tangente quelconque; le rapport constant aura pour expression, d'après le premier théorème :

$$r = \frac{(y_1 - mx_1 - n)(y_3 - mx_3 - n)}{(y_2 - mx_2 - n)(y_4 - mx_4 - n)}.$$

On sait qu'un foyer de la courbe doit être considéré comme le point de concours de deux tangentes qui ont pour équations

$$y = \pm\sqrt{-1}\,(x - c).$$

Or le rapport constant, pris relativement à l'une de ces tangentes, aura pour expression

$$r = \frac{[y_1 - \sqrt{-1}\,(x_1 - c)][y_3 - \sqrt{-1}\,(x_3 - c)]}{[y_2 - \sqrt{-1}\,(x_2 - c)][y_4 - \sqrt{-1}\,(x_4 - c)]}.$$

L'autre tangente donnera une expression identique, sauf le signe du radical; donc, multipliant ces valeurs, on aura

$$r^2 = \frac{[y_1^2 + (x_1 - c)^2][y_3^2 + (x_3 - c)^2]}{[y_2^2 + (x_2 - c)^2][y_4^2 + (x_4 - c)^2]},$$

ce qui démontre la proposition.

Il est clair que le résultat est le même pour les deux foyers, mais ce théorème est déjà démontré, même pour un polygone circonscrit d'un nombre quelconque de côtés. (*Nouvelles Annales*, t. XII, p. 219.)

MOYENNES GÉOMÉTRIQUES, ARITHMÉTIQUES, HARMONIQUES COMPARÉES;

D'APRÈS M. SCHLOMILCH.

Zeitshrift, 3e année, 1858, p. 187.

1. *Lemme*. *n* étant *entier positif* et $\alpha > \beta$, on a

$$(n+1)\alpha^n > \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} > (n+1)\beta^n,$$

posons

$$\alpha = \frac{n+z}{n+1}, \quad \beta = 1, \quad z > 1,$$

alors

$$\alpha > \beta;$$

il vient

$$\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^{n+1}-1>z-1,$$

$$\frac{n+z}{n+1}>z^{\frac{1}{n+1}}.$$

Posons maintenant

$$\alpha=1 \quad \text{et} \quad \beta=\frac{n+z}{n+1},$$

mais $z>1$; de sorte que $\alpha>\beta$.

On a encore

$$\frac{n+z}{n+1}>z^{\frac{1}{n+1}}.$$

Ainsi cette inégalité subsiste pour toute valeur de z plus grande ou moins grande que l'unité, et cesse pour $z=1$.

Faisons

$$z=\frac{y}{x^{\frac{1}{n}}};$$

on obtient, en remplaçant z par cette valeur,

(A) $$nx^{\frac{1}{n}}+y>(n+1)(xy)^{\frac{1}{n+1}},$$

pourvu qu'on n'ait pas $x=y^n$.

2. Théorème. *La moyenne arithmétique est toujours plus grande que la moyenne géométrique.*

Dans l'inégalité (A) faisons

$$n=1,\quad x=a,\quad y=b;$$

on a

$$a+b>2\sqrt{ab};$$

d'où

$$a+b+c>2\sqrt{ab}+c.$$

Faisant

$$n = 2, \quad x = ab, \quad y = c,$$

on obtient

$$a + b + c > 3\sqrt{abc}.$$

Faisons

$$n = 3, \quad x = abc, \quad y = d;$$

on a

$$a + b + c + d > 4\sqrt{abcd}.$$

3. Théorème. *La moyenne géométrique est plus grande que la moyenne harmonique.*

D'après le théorème précédent,

$$\frac{1}{n}[a_2a_3\ldots, a_n + a_1a_3\ldots, a_n + a_1a_4\ldots, a_n + \ldots, a_1a_2a_3\ldots, n_{n-1}]$$

$$> a_1a_2a_3\ldots, a_n)^{\frac{n-1}{n}},$$

$$\frac{1}{n}a_1a_2\ldots, a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) > (a_1a_2a_3 \ldots, a_n)^{\frac{n-1}{1}};$$

d'où

$$(a_1a_2\ldots, a_n)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_n}\right)}.$$

le membre à droite est la *moyenne harmonique*; donc, ...

Observation. Les a sont essentiellement des quantités réelles positives.

4. Lorsque a_1 et a_2 sont deux imaginaires conjuguées, la moyenne arithmétique est moins grande que la moyenne géométrique, et celle-ci est moindre que la moyenne harmonique.

Observation. Ainsi, les théorèmes précédents ne peuvent s'appliquer qu'aux équations dont les racines sont réelles et positives.

DÉDUCTION SIMPLE DE L'EXPRESSION $\Gamma(x)$ DE GAUSS;

D'APRÈS LE DOCTEUR ZEHFUSS.

GRUNERT, t. XXX, p. 441.

1. $$\mathrm{l}.\,x = \lim \frac{x^{\delta}-1}{\delta}, \quad \mathrm{l}.\,\frac{1}{x} = \lim \frac{1-x^{\delta}}{\delta};$$

posons

$$\delta = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{l}.\,x = \lim n\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right),$$

ou

$$\Gamma\mu = \int_0^1 (\mathrm{l}.\,x)^{\mu-1}\,dx = \lim n^{\mu-1}\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^{\mu-1} dx.$$

Faisons

$$x = t^n,$$

$$\Gamma(\mu) \lim n^{\mu} \int_0^1 (1-t)^{\mu-1}\, t^{n-1}\, dt,$$

et lorsque n est un nombre entier positif,

$$\int_0^1 (1-t)^{\mu-1}\, t^{n-1}\, dt = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1.2\ldots(n-1)}{\mu+1.\mu+2\ldots\mu+n-1};$$

d'où

$$\Gamma(\mu) = \lim \frac{n^{\mu}}{\mu}\cdot\frac{1.2\ldots n-1}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots\mu+n-1}$$

$$= \lim \frac{1}{\mu}\cdot\frac{2}{\mu+1}\cdot\frac{3}{\mu+2}\cdots\frac{n}{\mu+n-1}\cdot n^{\mu-1}$$

$$= \frac{1}{\mu}\cdot\frac{2^{\mu}}{\mu+1}\cdot\frac{2^{1-\mu}.3^{\mu}}{\mu+2}\cdot\frac{3^{1-\mu}.4^{\mu}}{\mu+3}\cdots$$

QUESTIONS.

483. *Théorème I.* D'un point B extérieur à une circonférence O on mène deux tangentes BA et BC, on projette C en D sur le rayon OA, et l'on fait exécuter une révolution complète à la figure autour de OA, l'un des rayons des points de contact; il faut démontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au cône engendré par le triangle BDA.

484. *Théorème II.* La même figure étant faite que précédemment, et exécutant la même révolution, il faut prouver que le segment sphérique engendré par CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

485. *Théorème III.* Le volume compris entre un cône droit ASA' et deux sphères O et C qui le touchent intérieurement et se touchent elles-mêmes extérieurement, est la moitié du volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les deux sphères de contact.

486. L'aire de la podaire du centre d'une ellipse est une moyenne *arithmétique* entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres. (Voir *Nouvelles Annales*, Strebor.)

On obtient aussi cette courbe par la construction des rayons réciproques émis du centre de l'ellipse, et l'on peut déterminer sur cette courbe des arcs à différence circulaire. (*Nouvelles Annales*, Strebor, t. XI, p. 183.)

(Arthur Lascases.)

487. *Sur le tétraèdre.* 1°. Les quatre hauteurs donnent lieu, prises deux à deux, à six plus courtes distances parallèles aux six arêtes du tétraèdre.

2°. Les six plus courtes distances donnent lieu, prises deux à deux, à quinze plus courtes distances, dont douze sont nulles et les trois autres sont parallèles aux trois plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre.

488. On donne, 1° une conique; 2° deux tangentes *fixes* à cette conique; 3° deux points fixes dans le plan de la conique; 4° une tangente mobile rencontre les deux tangentes fixes en deux points variables formant avec les points fixes les sommets d'un quadrilatère variable; les diagonales de ce quadrilatère se coupent suivant des points situés sur une conique passant par les points fixes, et énoncer le théorème correspondant d'après le principe de dualité.

489. *Théorème.* Si, généralement, on désigne par $a_{i,n}$ l'expression

$$a_{i,n} = (\alpha_i + \beta_i n)\cos n\varphi + (\gamma_i + \delta_i n)\sin n\varphi,$$

où n représente un entier quelconque, positif ou négatif, et α_i, β_i, γ_i, δ_i des constantes arbitraires indépendantes de n, le déterminant

$$\Delta_{k,n} = \begin{vmatrix} a_{0,n}, & a_{0,n+1}, & \ldots\ldots & a_{0,n+k} \\ a_{1,n}, & a_{1,n+1}, & \ldots\ldots & a_{1,n+k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k,n}, & a_{k,n+1}, & \ldots\ldots & a_{k,n+k} \end{vmatrix}$$

s'évanouira toutes les fois que $k > 3$, et pour $k = 3$ il conserve la même valeur, quelle que soit celle de n.

T.-A. Hirst.

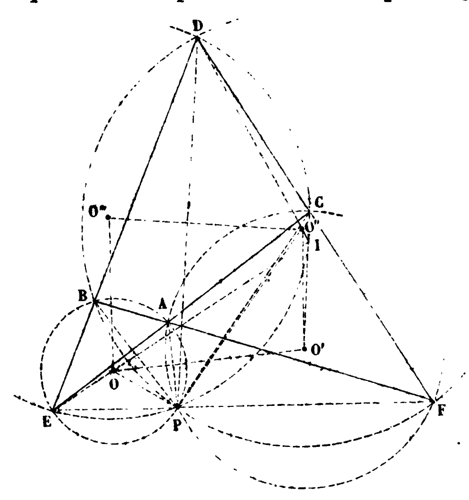
SOLUTION DE LA QUESTION 476

(voir p. 170);

Par MM. Adphonse Pujet et Émile Françoise,
Élèves du lycée de Caen (classe de M. Toussaint).

Cercle de neuf points.

Soit le quadrilatère plan ABCD. En prolongeant les



côtés d'après l'énoncé, on forme les quatre triangles

AEB, CED, AFC, BFD;

O, O''', O' et O'' sont les centres respectifs des circonférences circonscrites à ces quatre triangles.

On remarque :

1°. Que ces quatre circonférences se coupent en un même point P.

En effet, considérons ce point comme l'intersection des deux circonférences O et O'; il suffira de démontrer

que les quadrilatères EPCD et BPFD sont inscriptibles, ou que les angles EPC et BPF sont égaux entre eux et à $180 - BOC$; or

Le quadrilatère inscrit FPAC donne

$$FPC = FAC.$$

De même le quadrilatère inscrit EPAB donne

$$EPB = EAB = FAC,$$

donc

$$FPC = EPB;$$

d'où nous tirons

$$FPC + BPC = EPB + BPC \quad \text{ou bien} \quad EPC = BPF.$$

Les mêmes quadrilatères inscrits donnent

$$APF = ECD \quad \text{et} \quad APB = CED;$$

donc

$$APF + APB = BPF = ECD + CED = 180 - EDC.$$

C. Q. F. D.

2°. Le quadrilatère $OO'O''O'''$ est inscriptible, car les angles $O''OO'''$ et $O''O'O'''$, égaux respectivement à EPB et FPC, sont égaux entre eux, puisque l'on a

$$EPB = FPC.$$

Ceci posé, il s'agit de démontrer que les trois droites EO, DO'' et CO' se coupent en un même point, et que ce point appartient à la circonférence $OO'O''O'''$. Or l'angle OEA est le complément de EPA; $O'DC$ celui de ABD: mais le quadrilatère inscrit EPAB donne

$$\widehat{EPA} = \widehat{ABD};$$

donc

$$\widehat{OEA} = O''DC.$$

Ce qui démontre que le point I où se coupent les droites EO et DO$''$ appartient à la circonférence O$'''$.

Joignons maintenant IC et CO$'$; ces deux droites se confondent en une seule, car on a

$$\widehat{ECI} = \widehat{EDI} = 90 - BFD,$$

$$ECO' = 90 - AFC;$$

donc

$$ECO' = ECI.$$

C. Q. F. D.

Reste à faire voir que le point I appartient à la circonférence OO$'$O$''$O$'''$, ou que l'on a

$$OIO'' = OO'O'';$$

or,

$$OIO'' = ECD \text{ (angles ayant même mesure)},$$

$$OO'O'' = APF \text{ (angles ayant leurs côtés perpendiculaires)}.$$

Le quadrilatère inscrit APFC donne

$$APF = ACD;$$

donc

$$OIO'' = OO'O''.$$

C. Q. F. D.

On démontrerait, de la même manière, que les trois autres points I sont déterminés par l'intersection des trois circonférences O, O$'$, O$''$ avec OO$'$O$''$O$'''$. Ce que démontre le théorème proposé.

Remarque. Il y a un autre point important qui appartient à la même circonférence OO$'$O$''$O$'''$; c'est le point P. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que le quadrilatère OPIO$''$ est inscriptible, ou bien que l'on a

$$\widehat{POI} = \widehat{PO''I}:$$

or,

$$\widehat{POI} = 2\widehat{PEI}, \quad \widehat{PO''I} = 2\widehat{PDI} \quad \text{et} \quad PEI = PDI;$$

donc

$$POI = PO''I.$$

C. Q. F. D.

SÉRIE LOGARITHMIQUE D'EULER.

Euler, dans son *Calcul différentiel* (cap. VI, § 145), donne pour des nombres très-grands cette série approximative,

$$\log\frac{x+y}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots \frac{1}{x+y} + \frac{y}{2x(x+y)};$$

lorsque $x = y$, négligeant le dernier terme $\frac{1}{2x^2}$, on a

$$\log 2 = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{2x};$$

c'est la série donnée p. 463 (t. XVII des *Nouvelles Annales*). (*Communiqué.*)

C'est l'objet de la question 458, résolue par divers; M. Alfred Siebel, élève de l'École Polytechnique de Zurich, a envoyé une savante solution, fondée sur la théorie des séries.

TRAVAIL DANS LA POULIE MOBILE

(voir t. XVI, p. 344);

D'APRÈS M. BUCH.

Note. Beaucoup de fautes typographiques défigurant cet excellent article, nous jugeons utile de le reproduire; nous conservons la même figure.

1. *Notations*. α = angle de la puissance P et de la verticale Q;

ω = angle du chemin élémentaire OO′ et de la verticale;

s = le chemin élémentaire OO′;

H′O = chemin élémentaire de la résistance $= s\cos\omega$.

Donc

$$Q.H'O = Qs\cos\omega = \text{trav. élém. de } Q;$$

la différence des deux chemins FA + arc AB + BE et FA′ + arc A′B′ + B′E est

$$FA - FA' + \text{arc } AB - \text{arc } A'B' + BE - B'E;$$

l'arc GK est égal à l'arc AB; donc cette dernière différence est égale à

$$FA - FA' + \text{arc } GK - \text{arc } A'B' + BE - B'E = l:$$

mais

$$\text{arc } GK - \text{arc } A'B' = \text{arc } GA' + \text{arc } B'K;$$

donc cette différence devient

$$FA - FA' + \text{arc } GA' + \text{arc } B'K + BE - B'E = l.$$

Soit C la projection orthogonale de A′ sur FA, FA et

FA′ étant infiniment rapprochés, car le mouvement est élémentaire; on a

$$FA' = FC \quad \text{et} \quad FA - FA' = AC,$$

et, par la même raison,

$$BE - B'E = BD,$$

où D est la projection de B′ sur EB.

Soit M la projection de G sur FA; la tangente en G est parallèle à FA, et cette tangente coïncide avec l'arc *élémentaire* A′G; donc

$$\text{arc}\, GA' = CM, \quad \text{et} \quad FA - FA' + \text{arc}\, GA' = AC + CM = AM.$$

On démontre de même que

$$BE - B'E + \text{arc}\, B'K = BD + DN = BN,$$

où N est la projection de K sur EB.

Ainsi, la différence de ci-dessus devient

$$AM + BN = l,$$

où AM est la projection du chemin élémentaire OO′ sur FA. AM et OO′ faisant avec la verticale des angles α et ω, l'inclinaison de AM sur OO′ est $\alpha + \omega$; donc

$$AM = OO' \cos(\alpha + \omega) = s \cos(\alpha + \omega),$$

et, de même,

$$BN = OO' \cos(\alpha - \omega) = s \cos(\alpha - \omega);$$

donc

$$AM + BN = 2s \cos\alpha \cos\omega = l.$$

Le travail *élémentaire* de P est donc

$$Pl = 2P \cos\alpha . s \cos\omega:$$

or l'équation d'équilibre donne

$$Q = 2P \cos\alpha;$$

donc

$$P\,l = Q \cos\alpha,$$

c'est-à-dire le travail *élémentaire* de P est égal au travail élémentaire de Q. C. Q. F. D.

On voit que la même démonstration aurait lieu, si la poulie était une courbe quelconque, et si le déplacement était infiniment petit.

RELATIONS ENTRE LES POINTS ET TANGENTES MULTIPLES DE PLUSIEURS ESPÈCES.

m = degré de la courbe;

n = classe de la courbe;

δ = nombre de doubles-points (par lesquels passent deux tangentes);

$\varkappa$ = nombre de points de rebroussement (doubles-points par lesquels ne passent qu'une tangente (points stationnaires;

i = nombre de points d'inflexion (tangente stationnaire);

T = nombre de tangents double (tangents à deux points de contact).

(1) $$n = m^2 - m - 2\delta - 3\varkappa,$$

(2) $$m = n^2 - n - 2T - 3i,$$

(3) $$i = 3m^2 - 6m - 6\delta - 8\varkappa,$$

(4) $$\varkappa = 3n^2 - 6n - 6T - 8i.$$

Ces quatre équations ne constituent que trois équations indépendantes, car 3 (1) — (3) donne

(5) $$\varkappa - i = 3(m - n);$$

ce qu'on obtient aussi par (2) et (4).

Éliminant i entre ces équations, on obtient

$$(6) \left\{ \begin{aligned} 2T = m(m-2)(m^2-9) - 2(2\delta + 3\varkappa)(m^2 - m - 6) \\ + 4\delta(\delta - 1) + 9\varkappa(\varkappa - 1) + 6\delta\varkappa, \end{aligned} \right.$$

$$(7) \qquad 2(\delta - T) = (m-n)(m+n-9);$$

un double-point est équivalent à une condition, et un point de rebroussement à deux conditions.

(Salmon, *High. curves*, § 100, p. 90; et Steiner, Crelle, t. XLVII, 1856, p. 1.)

ENVELOPPES.

SALMON, *Higher curves*, p. 94.

1. $a, b, c, \ldots$ étant des fonctions linéaires des coordonnées x, y, soit donnée la relation

$$T = at^n + nbt^{n-1} + \frac{n.n-1}{2}ct^{n-2} + \ldots = 0,$$

où t est un paramètre variable; de sorte que T représente une droite variable dans un plan.

Soit $U = 0$ l'enveloppe de cette droite.

Il est évident que U est de la classe n; car, à une seule valeur de x, y et t, correspondent n droites tangentes à la courbe U; l'équation $U = 0$ s'obtient par l'élimination de t entre

$$T = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dt} = 0,$$

ou bien entre

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad nT - t\frac{dT}{dt} = 0;$$

dans cette dernière équation, le terme en t^n disparaît;

d'après le théorème de Cayley (t. XII, p. 396), les coefficients des deux équations montent dans chaque terme au degré $n-1$, et comme ces coefficients sont linéaires, il s'ensuit que le degré de U est $2(n-1)$. La classe devrait être dans le cas général $2(n-1)(2n-3)$; mais elle est de la classe n : donc la relation $T=0$ ne peut donner les courbes générales de la classe n; il y a donc des points multiples.

Points de rebroussement. $T=0$, $\dfrac{dT}{dt}=0$, $\dfrac{d^2T}{dt^2}=0$,

$$T = at^n + nbt^{n-1} + \frac{n(n-1)c}{1.2}t^{n-2} + \ldots,$$

$$\frac{dT}{dt} = n\left[at^{n-1} + (n-1)bt^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)c}{1.2}t^{n-3} + \ldots\right],$$

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2T}{dt^2} = n(n-1)\\ &\times\left[at^{n-2} + (n-2)bt^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)c}{1.2}t^{n-4} + \ldots\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &nT - \frac{tdT}{dt}\\ &= n\left[bt^{n-1} + (n-1)ct^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)dt^{n-3}}{1.2} + \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

$$(c)\quad \left\{\begin{aligned} &n(n-1)\frac{dT}{dt} - \frac{d^2T}{dt^2} = n(n-1)\\ &\times\left[bt^{n-2} + (n-2)ct^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}dt^{n-4} + \ldots\right] = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} &(n-1)(b) - t(c) = n(n-1)\\ &\times\left[ct^{n-2} + (n-2)dt^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)et^{n-4}}{1.2} + \ldots\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminant x et y entre les équations (a), (c), (d), on obtient une équation en t du degré $3(n-2)$; on a donc autant de points de rebroussement.

Points multiples. Dans la relation (1), on connaît donc pour le cas actuel : n classe de U ; m degré et $\varkappa$ nombre de points de rebroussement. Substituant ces valeurs, on trouve pour le nombre de points multiples δ,

$$\delta = 2(n-2)(n-3).$$

Points d'inflexion. $T = 0$ et $\frac{dT}{dt} = 0$ représentent deux droites qui doivent coïncider aux points d'inflexion ; cette identification n'est pas possible dans le cas général.

Tangente-double. L'équation $T = 0$ peut se mettre sous la forme

$$x F_1(t) + y F_2(t) + F_3(t) = 0;$$

pour qu'il y ait une tangente-double, il faut que pour deux valeurs différentes t_1, t_2 les deux droites coïncident.

Lorsque $n = 3$, on ne trouve qu'une seule double-tangente.

Observation. Lorsque a, b, c sont des fonctions de degré r, l'équation en U est de degré $2r(n-1)$.

Ainsi, si $n = 2$, $r = 1$, $U = 0$ représente une conique.

2. $A\mu^n + B\mu^p + C = 0$; A, B, C fonction d'un paramètre variable.

Équation de l'enveloppe :

$$n^n A^p C^{n-p} \pm p^n (n-p)^{n-p} B^n = 0.$$

Le signe + pour n impair et — 1 pour n pair.

3. $A \cos^m \theta + B \sin^m \theta = C$; θ paramètre variable.

Équation de l'enveloppe :

$$A^{\frac{2}{2-m}} + B^{\frac{2}{2-m}} = C^{\frac{2}{2-m}}.$$

Ainsi, toute tangente à une courbe donnée par l'équa-

tion $x^n + y^n = a^n$, peut être exprimée par l'équation

$$x\cos\theta^{\frac{2(n-1)}{n}} + y^{\frac{2(n-1)}{n}} = a.$$

4. $(A\alpha)^m + (B\beta)^m + C^m = 0$, α, β paramètres variables entre lesquels on donne la relation $(a\alpha)^n + (b\beta)^n + c^n = 0$; A, B, C fonctions de x, y; a, b, c, m, n, constantes données.

Soit

$$\frac{mn}{m-n} = p.$$

On obtient pour équation de l'enveloppe :

$$\left(\frac{a}{A}\right)^p + \left(\frac{b}{B}\right)^p + \left(\frac{c}{C}\right)^p = 0.$$

5. *Polaire réciproque.* $f(x, y, z) = 0$, équation homogène de la courbe;

$$x_1,\ y_1,\ z_1,$$

coordonnées d'un point de cette courbe;

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

équation de la directrice (cercle imaginaire);

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0,$$

équation de la tangente à la polaire réciproque.

L'enveloppe de cette droite donne l'équation de la polaire réciproque; les paramètres variables x_1, y_1, z_1 sont liés par la relation $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, il suffit d'éliminer z_1 : on obtient une équation homogène en x_1, y_1. Ordonnant par rapport à x_1, y_1, et écrivant que l'équation a deux racines égales, on obtient l'équation de la polaire réciproque, car x, y, z sont considérées comme coordonnées du point de contact de la droite avec la polaire réciproque.

Application.

$$a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + a'' z^2 + 2 b yz + 2 b' zx + 2 b'' xy = 0.$$

Représentons par Δ le déterminant; on a

$$\Delta = a b^2 + a' b'^2 + a'' b''^2 - a a' a'' - 2 b b' b'' = \begin{vmatrix} a, & b', & b'' \\ b'', & b, & a' \\ b', & a'', & b \end{vmatrix}$$

l'équation de la polaire réciproque relativement au cercle $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ est

$$x^2 \Delta_a + y^2 \Delta_{a'} + z^2 \Delta_{a''} + yz \Delta_{b''} + zx \Delta_{b'} + yx \Delta_{b''} = 0,$$

où

$$\Delta_a = \frac{d.\Delta}{da}, \quad \Delta_b = \frac{d.\Delta}{db}, \ldots.$$

L'équation de la polaire réciproque se déduit donc de l'équation donnée, en remplaçant le coefficient de chaque terme par la dérivée partielle analogue du déterminant.

Il y a deux moyens de trouver l'équation d'une polaire réciproque : 1° comme enveloppe d'une tangente ; 2° comme lieu du pôle d'une tangente. M. Salmon préfère la première méthode, et en a montré l'application aux courbes du quatrième ordre. (*High. curves*, page 101; 1852.) M. Cayley a, le premier, donné la polaire réciproque des courbes du troisième ordre. (*Camb. and Dub. mat. Journ.*; t. I, p. 97; 1846.)

Note. Sauf une plus simple démonstration, le procédé pour la limite des racines décrit page 310 a déjà été donné par M. Desboves (t. XIII, p. 60; 1854).

CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DE L'ÉPICYCLOIDE;

PAR M. A. MANNHEIM.

1. Désignons par f (*) le centre de la circonférence fixe F (**), par m le centre de la circonférence mobile M qui roule sur la première, et par d le point de contact de ces deux circonférences.

A étant une courbe quelconque liée à la circonférence M, on sait que le pied n de la normale abaissée du point d sur A est le point de contact de cette ligne avec la courbe qu'elle enveloppe pendant le mouvement de M. Soit a le centre de courbure de A correspondant au point n; après un mouvement infiniment petit, M touche F au point d', A touche son enveloppe au point n', et la ligne $d'n'$, normale à cette enveloppe, passe par la nouvelle position a' du centre de courbure a. Les droites dn, $d'n'$ sont deux normales infiniment voisines de la courbe enveloppée, elles se coupent donc au centre de courbure de cette courbe; elles sont aussi deux normales infiniment voisines de la courbe décrite par a. On voit donc que, *pour un mouvement infiniment petit de* M, *la courbe décrite par* a *et la courbe enveloppe de* A *ont même centre de courbure* (***).

2. Plus généralement, *deux courbes parallèles enveloppent deux courbes parallèles*. Cette propriété se démontre très-simplement.

(*) On est prié de faire les figures.

(**) La ligne fixe sur laquelle s'effectue le roulement de la ligne mobile porte le nom de *base* de la roulette.

(***) *Des méthodes en géométrie*, par M. Paul Serret, p. 83.

3. La recherche du centre de courbure de la courbe enveloppe de A est donc ramenée à celle du centre de courbure de l'épicycloïde décrite par le point a.

Joignons le point a au point d, nous savons déjà que le centre de courbure est sur cette droite. Par le point f, menons parallèlement à am la droite fb, qui coupe ad au point b; les triangles adm et bdf sont semblables : on conclut de là que la longueur fb est constante.

Le lieu décrit par le point b lorsque la circonférence M roule sur F, est donc une circonférence ayant le point f pour centre. En outre, le rapport $\frac{ad}{db}$ étant constant, on voit que la normale ad est partagée, par trois courbes connues, dans un rapport constant : on peut donc appliquer les constructions données dans le numéro de septembre 1857, p. 323 (n°s 5, 9, 11).

Menons au point d la tangente commune T aux deux circonférences F et M, au point a la perpendiculaire T_1 à ad, au point b la perpendiculaire T_2 à fb; la parabole tangente à T, T_1, T_2, ad touche cette dernière au centre de courbure de l'épicycloïde décrite par le point a (t. XVI. p. 325, n° 11).

Appliquons la construction donnée dans le même volume, au n° 10 de la page 324. La normale à l'élément décrit par le point a est ad, la normale à l'élément décrit par le point d est fd, et la normale à l'élément décrit par le point b est fb; il faut chercher une droite perpendiculaire à ad qui soit partagée par ces trois normales dans le rapport constant $\frac{ad}{db}$; le point où cette perpendiculaire coupera ad sera le centre de courbure cherché.

Pour cela, élevons au point d une perpendiculaire à ad: soient p et q les points où elle coupe am et bf; menons

fp ; soit α le point où elle coupe ad : ce point est le centre de courbure cherché, car la droite menée par ce point parallèlement à dp sera perpendiculaire à ad et sera partagée par les normales ad, df, bf dans le rapport $\frac{dp}{dq}$ ou $\frac{ad}{db}$.

4. La construction se réduit à élever au point d une perpendiculaire à ad, cette perpendiculaire coupe am au point p, la ligne fp coupe ad au centre de courbure α. Cette construction est due à M. Savary (*).

5. *Remarque.* Dans le cas particulier où le point a est sur la circonférence M, le point b est sur la circonférence F, et le point α est alors la conjuguée harmonique du point a par rapport aux points d, b.

On déduit facilement de là que l'épicycloïde décrite par un point de la circonférence M et sa développée sont deux courbes semblables.

6. De la construction générale que nous venons de donner, on déduit la formule de M. Savary de la manière suivante :

On sait que : *Étant donnés un angle dont le sommet est* m *et un point* o *dans son plan, on a, en observant la règle des signes, quelle que soit la direction d'une droite passant par ce point et coupant les côtés de l'angle aux points* c *et* d,

$$\left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right)\frac{1}{\sin dom} = \text{const. } (^{**})$$

(*) Voir *Traité de Géométrie descriptive* de M. Leroy, 2e édition, 1842, p. 386.

(**) Voir *Transformation des propriétés métriques des figures*, p. 3.

D'après cela, dans l'angle apf on a

$$\frac{1}{d\alpha}-\frac{1}{da}=\left(\frac{1}{df}-\frac{1}{dm}\right)\frac{1}{\sin fdp};$$

d'où la formule de M. Savary

$$\left(\frac{1}{d\alpha}-\frac{1}{da}\right)\cos fd\alpha=\frac{1}{df}-\frac{1}{dm}.$$

APPLICATIONS. 1°. *Une parabole roule sur une droite* T, *le foyer* a *de cette parabole décrit une courbe* (*chaînette*); *on demande pour une position arbitraire de* a *le centre de courbure de cette chaînette.*

Soit d le point où la parabole touche T; prolongeons da d'une longueur égale à elle-même jusqu'en b; au point b élevons une perpendiculaire sur bd, et au point d une perpendiculaire sur T : ces deux perpendiculaires se coupent en m, centre de courbure de la parabole. Au point d élevons une perpendiculaire à ad et prolongeons cette droite jusqu'à sa rencontre c avec am; du point c abaissons une perpendiculaire sur T: cette perpendiculaire coupe ad au centre de courbure cherché. On voit, par cette construction, que le point b est ce centre de courbure.

Remarques. La ligne bd est tangente à la développée de la chaînette; la portion bd de cette tangente est toujours partagée en deux parties égales par le point a : on déduit de là (t. XVI, p. 326) que, pour obtenir au point b le centre de courbure de la développée de la chaînette, il faut prolonger mb d'une longueur égale à elle-même.

Dans le triangle dbm, md est le rayon de courbure de la parabole, bd est égale à deux fois le rayon de courbure de la chaînette, bm est égale au rayon de courbure de la développée de la chaînette; en désignant par r, r_1, r_2

ces trois rayons, on a

$$r^2 = 4r_1^2 + r_2^2,$$

relation remarquable, due à M. Lamarle (*).

2°. Soient T la tangente au sommet d'une parabole, b le foyer et e le sommet de cette courbe ; lorsqu'elle roule sur T, supposée fixe, b engendre une chaînette C tangente à une droite S menée par le point b parallèlement à T : *nous allons faire rouler cette chaînette sur la droite* S, *supposée fixe, et chercher le centre de courbure de la courbe enveloppée par sa base* T.

Soit a un point quelconque de C; il arrivera un moment où ce point sera sur S. Désignons par a' cette nouvelle position du point a, la droite T occupe maintenant la position T'; nous allons chercher pour cette position le centre de courbure de la courbe enveloppe de T.

Cherchons d'abord le centre de courbure de la chaînette au point a' : en ce point élevons une perpendiculaire à S, cette perpendiculaire coupe T' au point g; en prolongeant ga' d'une longueur égale à elle-même, nous obtenons, d'après ce que nous venons de voir, le centre de courbure de la chaînette pour le point a'.

En appliquant maintenant la construction (4) au point qui se trouve à l'infini sur la perpendiculaire abaissée du point a' sur T', on trouve que le point où cette perpendiculaire coupe T' est justement le centre de courbure cherché. Puisque la droite T dans ses différentes positions passe constamment par le centre de courbure de son enveloppe, cette enveloppe est un point, et ce point est le sommet e, pied de la perpendiculaire abaissée du point b sur T. On peut donc dire : *Lorsqu'une chaînette roule sur une droite, sa base passe par un point fixe,* ou en-

(*) *Théorie géométrique des rayons et centres de courbure*, p. 75.

core, *sa tangente au sommet enveloppe une circonférence.*

Remarque. Lorsque la chaînette touche S en a', e est le pied de l'ordonnée du point a; on voit immédiatement que la distance eb de ce point à la tangente S est constante, et que la distance ba' est égale à la longueur de l'arc de la chaînette compris entre a' et le sommet de cette courbe. Si l'on désigne par a la distance constante eb, par s l'arc compris entre a' et le sommet de la chaînette, par φ l'angle de S et de T', on a

$$s = a \operatorname{tang} \varphi,$$

équation très-simple de la chaînette entre les coordonnées s et φ (*Éléments de Statique*, par M. Poinsot).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
Composition de mathématiques (année 1859);

PAR M. JAUFROID,
Professeur de mathématiques au collége de Toulon.

Énoncé. 1°. On donne dans un plan un nombre quelconque de points : trouver, parmi toutes les droites parallèles à une direction donnée, et situées dans ce plan, celle dont la somme des carrés des distances aux points donnés est un minimum.

2°. La direction de la droite venant à varier, et les points donnés restant les mêmes, prouver que la ligne qui remplit la condition de minimum énoncée plus haut passe par un point fixe.

3°. Combien, par un point donné du plan, peut-on faire passer de lignes telles, que la somme des carrés de

leurs distances aux points donnés soit égale à un carré donné.

4°. Il peut arriver que les lignes qui satisfont à la question précédente soient imaginaires : cela a lieu lorsque le point donné est dans l'intérieur d'une certaine courbe dont on demande l'équation.

5°. On peut toujours, quel que soit le nombre des points donnés, et de quelque manière qu'ils soient placés, les remplacer par trois autres, tels, que la somme des carrés de leurs distances à une droite quelconque du plan soit proportionnelle à la somme des carrés des distances des points donnés à la même droite, ou, en d'autres termes, tels, que le rapport des deux sommes de carrés soit le même pour toutes les droites du plan.

6°. Les trois points définis dans la question précédente sont indéterminés; trouver la courbe sur laquelle ils sont situés.

7°. Le triangle qui a ces trois points pour sommets, a une surface constante.

Notation. (x', y'), (x'', y''),..., points donnés.

$$S(x) = x' + x'' + \ldots,$$
$$S(y) = y' + y'' + \ldots,$$
$$S(xy) = x'y' + x''y'' + \ldots\ldots$$

Les formules de transformation des coordonnées servent à prouver facilement qu'on peut prendre pour origine un point tel, et des axes rectangulaires dirigés de telle manière, que l'on ait

$$S(x) = 0, \quad S(y) = 0, \quad S(xy) = 0.$$

1°. Soit m le nombre des points donnés; l'équation du problème est

$$\frac{S(y - ax - b)^2}{1 + a^2} = A^2,$$

ou

$$(1) \qquad \mathrm{S}(y^2) + a^2\,\mathrm{S}(x^2) + mb^2 = (1 + a^2)\,\mathrm{A}^2.$$

La condition de réalité de b donne pour le minimum de A^2, que je représente par A'^2,

$$\mathrm{A}'^2 = \frac{\mathrm{S}(y^2) + a^2\,\mathrm{S}(x^2)}{1 + a^2};$$

on a alors $b = 0$, c'est-à-dire que la droite passe par l'origine, et cela quel que soit a.

2°. Le centre des moyennes distances est donc le point fixe par lequel passe constamment la droite correspondant au minimum, lorsque a varie.

3°. Soient (α, β) un point donné; $y - \beta = a(x - \alpha)$ une droite passant par ce point, l'ordonnée à l'origine est $\beta - a\alpha$; portant cette valeur à la place de b dans l'équation (1), et développant, on obtient

$$[\mathrm{S}(x^2) + m\alpha^2 - \mathrm{A}^2]\,a^2 - 2m\alpha\beta a + \mathrm{S}(y^2) + m\beta^2 - \mathrm{A}^2 = 0$$

Les valeurs de a qu'on en tire peuvent se mettre sous la forme

$$a = \frac{m\alpha\beta \pm m\sqrt{\frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{S}(x^2)}{m}\beta^2 + \frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{S}(y^2)}{m}\alpha^2 - \frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{S}(x^2)}{m} \times \frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{S}(y^2)}{m}}}{\mathrm{S}(x^2) + m\alpha^2 - \mathrm{A}^2}.$$

On peut donc, en général, par un point donné, faire passer deux droites répondant à un carré donné A^2.

4°. Si la quantité sous le radical est négative, a est imaginaire; le point donné est alors dans l'intérieur de la conique

$$\frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{S}(x^2)}{m}\mathrm{Y}^2 + \frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{S}(y^2)}{m}\mathrm{X}^2 - \frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{S}(x^2)}{m} \times \frac{\mathrm{A}^2 - \mathrm{S}(y^2)}{m} = 0.$$

Cette conique est une ellipse si l'on a à la fois

$$\mathrm{A}^2 > \mathrm{S}(x^2), \quad \mathrm{A}^2 > (y^2).$$

C'est une hyperbole si A^2 est compris entre $S(x^2)$ et $S(y^2)$: on ne peut pas avoir A^2 égal ou plus petit que la plus petite des quantités $S(x^2)$ et $S(y^2)$, car alors a est imaginaire, quel que soit le point donné.

Si A^2 est égal à la plus grande de ces valeurs, a est toujours réel, quel que soit le point donné.

En faisant $\alpha=0$, $\beta=0$, la droite considérée passe par l'origine, et la condition de réalité de a donne alors pour le maximum minimorum et le minimum minimorum les quantités $S(x^2)$ et $S(y^2)$, les axes sont alors les droites répondant à ces valeurs.

5°. Soient (p, q), (p', q'), (p'', q'') trois points. La cinquième question conduit à l'équation

$$\frac{S(y^2)+a^2S(x^2)+mb^2}{S(y^2)+a^2S(p^2)+3b^2-2aS(pq)-2bS(q)+2abS(p)}=R;$$

cette équation sera satisfaite, quels que soient a et b, en posant

$$R=\frac{m}{3}.$$

$$(2)\qquad p^2+p'^2+p''^2=\frac{3}{m}S(x^2)=2g^2,$$

$$(3)\qquad q^2+q'^2+q''^2=\frac{3}{m}S(y^2)=2h^2,$$

$$(4)\qquad pq+p'q'+p''q''=0,$$

$$(5)\qquad p+p'+p''=0,$$

$$(6)\qquad q+q'+q''=0.$$

Les couples (p, q), (p', q'), (p'', q'') entrant de la même manière dans ces équations, l'élimination conduirait à une équation en p, q, identique à celle qu'on trouverait en p', q' ou en p'', q''. L'équation en p, q sera donc le lieu des trois points considérés.

Avant de chercher ce lieu, nous allons démontrer que

le triangle qui a ses trois points pour sommets a une surface constante.

Soit T cette surface; on a, après toutes réductions,

$$2T = qp - pq' + q'p'' - p'q'' + pq'' - qp'';$$

mais les équations (5) et (6), multipliées respectivement par q' et p', puis par q'' et p'', et retranchées, donnent

$$qp' - pq' = q'p'' - p'q'' = pq'' - qp'',$$

on a donc

$$qp' - pq' = q'p'' - p'q'' = pq'' - qp'' = \frac{2}{3}T;$$

élevant au carré et ajoutant, il vient

$$(qp' - pq')^2 + (q'p'' - p'q'')^2 + (pq'' - qp'') = \frac{4}{3}T^2.$$

Développant et se servant des équations (2), (3) et (4), on obtient

$$T^2 = 3g^2h^2.$$

6°. Considérons maintenant le système

$$(7) \qquad qp' - pq' = \frac{2}{3}T,$$

$$(8) \qquad p^2 + pp' + p'^2 = g^2,$$

$$(9) \qquad q^2 + qq' + p'^2 = h.$$

Les équations (8) et (9) ont été obtenues en portant dans les équations (2) et (3) les valeurs de p'' et q'' fournies par les équations (5) et (6). Il s'agit d'éliminer p' et q' entre ces trois équations.

Portant dans l'équation (8) la valeur de p' fournie par l'équation (7), simplifiant à l'aide de l'équation (9), on obtient une équation du premier degré en q'; résolvant et portant cette valeur de q' dans l'équation (9), on ob-

tient, en remplaçant T^2 par sa valeur,

$$(3g^2q^2 + 3p^2h^2 - 4g^2h^2)^2 = 0;$$

ce qui donne, pour le lieu des trois points considérés, l'ellipse

$$\frac{4g^2}{3}Y^2 + \frac{4h^2}{3}X^2 - \frac{4g^2}{3} + \frac{4h^2}{3} = 0.$$

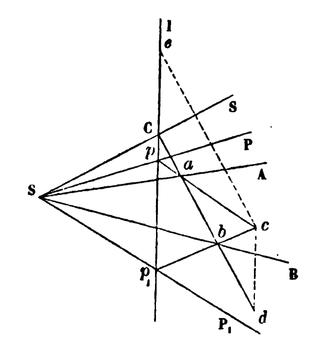
TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES

(voir t. XVII, p. 184);

Par M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Transformation des relations de segments.

Transformer homographiquement la longueur d'un segment a′ b′ *d'une droite* C′.



8 *bis*. Soient sur une droite C deux points a, b correspondants aux points a' et b' de la droite C'. Prenons sur la droite I les deux points p et p_1 qui correspondent à ceux de la première figure situés à l'infini sur les droites imaginaires $y' = \pm\sqrt{-1}\,x'$. Si l'on mène les

droites pa, $p_1 b$, on formera un triangle abc qui sera l'homologue du triangle $a'b'c'$ de la première figure, construit d'après le lemme.

On aura donc, d'après la relation d'aire (1) (t. XVII, p. 382),

$$a'b'c' = m\,\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma},$$

α, β, γ étant les distances des sommets a, b, c à la droite I. Mais, d'après le lemme cité,

$$a'b'c' = \frac{\overline{a'b'}^2}{4\sqrt{-1}}:$$

donc

$$\overline{a'b'}^2 = 4m\sqrt{-1}\,\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma}.$$

La longueur $a'b'$ se trouve ainsi transformée, et nous n'introduisons dans la seconde figure que deux nouveaux points p et p_1. S'il se trouve un cercle dans la première figure, il lui correspond dans la seconde une conique, dont les points d'intersection avec la droite I sont nos points p et p_1.

9. L'expression précédente peut se mettre sous une forme plus commode pour les applications. Menons la droite ce parallèle à C et cd parallèle à I. Les droites C et I se coupent au point C. On a

$$\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma} = \frac{ab.cd}{2\,\mathrm{C}a.\mathrm{C}b.ce\sin(\mathrm{C},\mathrm{I})};$$

or

$$\frac{cd}{ce} = \frac{\mathrm{C}p.ac}{\mathrm{C}a.cp} = \frac{\mathrm{C}p_1.bc}{\mathrm{C}b.cp_1},$$

par suite

$$\frac{\overline{cd}^2}{\overline{ce}^2} = \frac{\mathrm{C}p.\mathrm{C}p_1}{\mathrm{C}a.\mathrm{C}b}\cdot\frac{ac\;bc}{cp.cp_1} = \frac{\mathrm{C}p.\mathrm{C}p_1}{\mathrm{C}a.\mathrm{C}b}\cdot\frac{ab.cd}{pp_1.ce};$$

donc

$$\frac{cd}{ce} = \frac{Ca.Cp_1.ab}{Ca.Cb.pp_1},$$

et

$$\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{Ca}^2.\overline{Cb}^2} \frac{Cp\ Cp_1}{pp_1} \frac{1}{2\overline{\sin}^2(C,I)}.$$

Si l'on pose

$$R^2 = \frac{2m\sqrt{-1}\ Cp.Cp}{pp_1},$$

on aura

(1) $$a'b' = R\frac{ab\ \sin(C,I)}{\alpha.\beta}.$$

Première transformation.

Appelons π et π_1 les distances des points p et p_1 au segment ab; on aura aussi

(2) $$a'b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}}{pp_1}}\frac{ab\sqrt{\pi.\pi_1}}{\alpha.\beta},$$

et, sous cette forme, nous dirons que *la longueur d'un segment d'une figure est égale à la longueur du segment correspondant divisée par le produit des distances de ses extrémités à une droite fixe* I, *multipliée par la racine carrée du produit des distances de deux points fixes de cette droite au segment et par une constante.*

La formule (1) peut s'écrire

(3) $$a'b' = R\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right),$$

de sorte que si la distance β est infinie, on a

(3)' $$a'b' = \frac{R}{\alpha};$$

dans ce cas le point b' est situé sur la droite I'.

On a aussi

$$(4) \qquad a'b' = R \cdot \frac{ab}{Ca.Cb} \frac{1}{\sin(C, I)}.$$

Si l'on joint un point quelconque S aux points a', b', C par les droites A, B, S, on a

$$(5) \qquad a'b' = R \frac{\sin(A, B)}{\sin(S, A)\sin(S, B)} \cdot \frac{1}{SC},$$

$$(6) \qquad a'b' = R \frac{Sab}{SaC.SCb} \cdot \frac{SC}{2};$$

Sab indiquant l'aire du triangle Sab, etc.

On pourra prendre pour le point S l'un des points doubles.

10. La valeur de R^2 est affectée du signe $\sqrt{-1}$, mais on voit sans peine que l'imaginarité n'est qu'apparente; car si les constantes a, b, c, ..., sont réelles, les points p et p_1 sont imaginaires, et par suite l'expression de pp_1. Si au contraire ces points sont réels, il faut que les constantes a, b, c ou a', b' et c' soient imaginaires, et alors m le sera aussi.

11. On peut, au reste, faire disparaître le signe $\sqrt{-1}$ en introduisant dans la formule le milieu q du segment pp_1 et le point C_1 conjugué harmonique du point C relativement aux points p et p_1. On a, en effet, les relations

$$\overline{pp_1}^2 = 4\,Cq.C_1q,$$

$$Cp.Cp_1 = Cq.CC_1;$$

d'où

$$R^2 = m\,CC_1 \sqrt{\frac{Cq}{qC_1}}.$$

12. Cas particuliers. 1°. *La droite* I *est à l'infini.*

On a ainsi le mode particulier d'homographie dans le-

quel à des droites parallèles dans l'une des figures correspondent des droites parallèles dans l'autre.

Soient dans la deuxième figure deux droites P, P_1 correspondant respectivement aux droites $y' = \pm \sqrt{-1}\, x'$ de la première. Le segment ab étant l'homologue du segment $a'b'$, menons ac parallèle à P, bc parallèle à P_1; le triangle abc correspond au triangle $a'b'c'$ du lemme, de sorte que si l'on a égard à la relation d'aire qui a lieu pour ce cas (6), on aura

$$\overline{a'b'}^2 = 4c'' \sqrt{-1} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} abc.$$

Cette relation fait voir qu'un théorème étant démontré dans le cas général (8), on aura celui qui lui correspond dans le cas actuel, en remplaçant par l'unité celles des distances $\alpha, \beta, \ldots$ qui deviennent infinies.

2°. *Les droites imaginaires* $y' = \pm \sqrt{-1}\, x'$ *de la première figure coïncident avec leurs analogues.*

Si l'on appelle S le point d'intersection des droites P et P_1 qui correspondent aux droites imaginaires de la première figure, les lignes SC, SC_1 seront à angle droit, et Sq sera perpendiculaire sur I (il faut se rappeler que les droites $y = \pm \sqrt{-1}\, x$ forment un faisceau harmonique avec les deux côtés d'un angle droit).

Dans la valeur de R^2 (11) on peut donc, au rapport $\frac{Cq}{qC_1}$, substituer son égal $\frac{\overline{SC}^2}{\overline{SC_1}^2}$, et si l'on remarque, de plus, que $CC_1 . Sq = SC . SC_1$, on aura $R^2 = \overline{SC}^2 \frac{m}{Sq}$, de sorte que la formule (1) devient

$$a'b' = \sqrt{\frac{m}{Sq}} \cdot \frac{ab . SC \sin (C . I)}{\alpha . \beta};$$

le radical est ici constant.

Si l'on exprime analytiquement que les droites $y' = \pm\sqrt{-1}\, x'$ coïncident avec leurs homologues

$$a'x' + b'y + c' = \pm\sqrt{-1}\,(ax + by + c),$$

on trouve les relations

$$a' = \pm b, \quad b' = \pm a, \quad c = c' = 0,$$

de sorte que les formules de transformations deviennent

$$x' = \frac{ax + by}{a''x + b''y + c''}, \quad y' = \frac{\mp bx \pm ay}{a''x + b''y + c''}.$$

Transformation des relations d'angles.

Transformer homographiquement les lignes trigonométriques d'un angle et l'angle lui-même.

13. Soient $a'b'c'$ un triangle, abc le triangle homographique

$$\sin a' = \frac{2\,a'b'c'}{a'b'.a'c'};$$

d'après nos relations d'aire et de segment, on a

$$a'b'c' = m \cdot \frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma};$$

$$a'b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}\,Cp.Cp_1}{pp_1}}\,\frac{ab}{Ca.Cb}\,\frac{1}{\sin(C, I)},$$

$$a'c' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}\,Bp.Bp_1}{pp_1}}\,\frac{ac}{Ba.bc}\,\frac{1}{\sin(B, I)};$$

dans ces formules, B et C indiquent les droites formant les côtés de l'angle a qui correspond à l'angle donné a', nous désignons par les mêmes lettres les points où ces deux droites rencontrent la droite I.

Remplaçant dans l'expression de $\sin a'$, on obtient,

après simplification,

$$\sin a' = \frac{1}{2} \frac{BC.pp_1}{\sqrt{-Cp.Cp_1.Bp.Bp_1}}.$$

Soit r le rapport anharmonique des points p, p_1, B, C,

$$r = \frac{Cp}{Cp_1} : \frac{Bp}{Bp_1};$$

on pourra mettre la relation précédente sous la forme

$$\sin a' = \frac{1}{2} \frac{1-r}{\sqrt{-r}};$$

d'où l'on déduit aussi

$$\cos a' = \frac{1}{2} \frac{1+r}{\sqrt{r}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} a' = \frac{1-\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}} \sqrt{-1}.$$

Ces formules serviront à transformer une quelconque des lignes trigonométriques d'un angle.

Si l'on veut transformer l'angle lui-même, on remarquera que les formules précédentes donnent

$$\cos a' - \sin a' \sqrt{-1} = \sqrt{r};$$

d'où

$$a' = -\frac{\log r}{2\sqrt{-1}},$$

relation très-élégante, due à M. Laguerre-Werly. On y parvient en cherchant le rapport anharmonique des droites B, C et $y = \pm \sqrt{-1}\, x$.

Transformer homographiquement la distance d'un point c' *à une droite* C'.

14. Prenons deux points arbitraires a' et b' sur la droite C', de manière à former le triangle $a'b'c'$. Désignant par h' la hauteur de ce triangle correspondant au

sommet c',

$$2a'b'c' = a'b'.h';$$

d'où

$$h' = \frac{2.a'b'c'}{a'b'}.$$

Soit *abc* le triangle homographique. On a

$$a'b'c' = m \cdot \frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma},$$

et, formule (7),

$$a'b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}}{pp_1}} \cdot \frac{ab\sqrt{\pi.\pi_1}}{\alpha.\beta};$$

par suite,

$$h' = \sqrt{\frac{m.pp_1}{2\sqrt{-1}}} \frac{2abc}{ab.\gamma\sqrt{\pi.\pi_1}},$$

et h désignant la distance du point c à la droite ab ou C,

$$h' = \sqrt{\frac{m.pp_1}{2\sqrt{-1}}} \frac{h}{\gamma\sqrt{\pi.\pi_1}};$$

dans cette relation γ exprime, comme précédemment, la distance du point c à la droite p, p_1 et π, π_1 sont les distances des points fixes p et p_1 à la droite C.

La distance d'un point à une droite est égale à la distance correspondante dans la figure homographique divisée par la distance du point qui correspond au point donné à la droite I, *par la racine carré du produit des distances de deux points fixes de cette droite à la droite qui correspond à la droite donnée et multipliée par une constante.*

(*Les Applications prochainement.*)

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE).

1. *Si la différence* m[ième] *d'une fonction* f(x) *est constante, la fonction est algébrique entière et du degré* m (*).

1°. *Lorsque la première différence d'une fonction* f(x) *est une quantité constante* c, *la fonction est entière et du premier degré.*

Soit h la différence constante de la variable; on aura, par hypothèse,

$$(1) \qquad f(x+h)-f(x)=c;$$

et, en égalant les dérivées, par rapport à x, des deux membres de l'équation (1), il viendra

$$f'(x+h)-f'(x)=0 \quad \text{ou} \quad f'(x+h)=f'(x).$$

Cette dernière relation montre que la dérivée de $f(x)$ reste invariable quelle que soit la valeur substituée à x; donc, $f(x)$ est une fonction entière du premier degré.

2°. *Lorsque la première différence d'une fonction* f(x) *est un polynôme entier du degré* n, *la fonction est un polynôme entier du degré* (n + 1).

En effet, par hypothèse, on a

$$(2) \qquad f(x+h)-f(x)=Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+R.$$

Puis, en prenant les dérivées de l'ordre $(n+1)$ par rapport à x,

$$f_{n+1}(x+h)-f_{n+1}(x)=0,$$

(*) C'est la réciproque de cette proposition du Programme officiel : *La différence de l'ordre* m *d'une fonction entière du degré* m *est constante si la différence de la variable est elle-même constante.*

ou

$$f_{n+1}(x+h) = f_{n+1}(x);$$

d'où l'on conclura, comme précédemment, que la dérivée de l'ordre $(n+1)$ de $f(x)$ est constante, et que, par conséquent, $f(x)$ est une fonction entière du degré $(n+1)$.

Au moyen de ces deux remarques, il est facile d'établir la proposition (1). Car, d'après la première, si la différence $m^{ième}$ de $f(x)$ est constante, la différence $(m-1)^{ième}$ de $f(x)$ est une fonction entière du premier degré. Donc (2°), la différence $(m-2)^{ième}$ sera une fonction entière et du second degré. Et ainsi de suite. G.

NOTE

Sur une démonstration d'un théorème de mécanique énoncé par Euler.

Dans le mouvement d'un corps rigide, il est toujours possible d'assigner une droite passant par un point arbitraire du corps, mobile avec lui et telle, qu'au bout d'un temps fini quelconque, elle se trouve parallèle à sa direction initiale.

Le théorème d'Euler revient évidemment, comme le fait observer M. Brioschi (*), à cette proposition de géométrie élémentaire :

Étant donnés deux systèmes d'axes rectangulaires ayant la même origine, on peut déterminer une droite passant par cette origine, et telle, qu'une rotation autour de cette droite amène l'un des systèmes à coïncider avec l'autre; proposition qui ne diffère pas de celle-ci :

Étant donnés deux systèmes d'axes rectangulaires

(*) Théorie des *déterminants*, p. 78.

(OX, OY, OZ), (OX', OY', OZ'), *de même origine, on peut déterminer une droite* (OH) *passant par l'origine, et qui fasse avec les axes* OX', OY', OZ' *des angles* HOX', HOY', HOZ' *respectivement égaux aux angles* HOX, HOY, HOZ.

Il est facile d'établir l'existence de la droite en question dans ce dernier énoncé. Car, si l'on mène les bissectrices OA, OB des angles X'OX, Y'OY, et qu'ensuite on élève par OA et OB des plans perpendiculaires à X'OX, Y'OY, l'intersection OH de ces deux plans sera précisément la droite cherchée.

En effet, il est clair qu'on aura d'abord HOX' = HOX et HOY' = HOY; d'ailleurs, X'OY' = XOY comme droits : donc les deux angles *trièdres* OHX'Y', OHXY ont leurs trois faces égales chacune à chacune, et, par conséquent, ces deux *trièdres* sont égaux dans toutes leurs parties. Il en résulte que les inclinaisons de la droite OH sur les plans OX'Y', OXY sont égales entre elles; d'où il faut conclure que cette droite fait aussi des angles égaux avec les deux axes OZ', OZ perpendiculaires aux plans OX'Y', OXY. La proposition est ainsi démontrée.

L'égalité HOZ = HOZ' montre que la droite OH est située dans un plan perpendiculaire à ZOZ' et passant par la bissectrice OC de l'angle ZOZ'. Donc les trois plans respectivement perpendiculaires à X'OX, Y'OY, Z'OZ, et menés par les bissectrices OA, OB, OC des angles X'OX, Y'OY, Z'OZ se coupent suivant une même droite.

On peut, sans difficulté, reconnaître que les trois angles dièdres X'OHX, Y'OHY, Z'OHZ sont égaux entre deux, et que la valeur de ces dièdres représente l'angle de la rotation qui amène l'un des deux systèmes d'axes à coïncider avec l'autre.

M. Brioschi a donné, de la proposition que nous ve-

nons d'exposer, une démonstration analytique qui offre une application remarquable de la théorie des déterminants.

Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la droite cherchée (OH), rapportée aux axes OX, OY, OZ; et par (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) les cosinus des angles que les droites OX', OY', OZ' forment avec les axes de coordonnées OX, OY, OZ; les égalités HOX' = HOX, HOY' = HOY, HOZ' = HOZ donnent lieu aux équations

$$(1) \qquad (a_1 - 1)x + b_1 y + c_1 z = 0,$$

$$(2) \qquad a_2 x + (b_2 - 1)y + c_2 z = 0,$$

$$(3) \qquad a_3 x + b_3 y + (c_3 - 1)z = 0,$$

qui représentent trois plans dans lesquels la droite que l'on cherche doit se trouver. Tout se réduit donc à faire voir que ces trois plans se coupent suivant une même droite, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{vmatrix} (a_1 - 1), & b_1, & c_1 \\ a_2, & (b_2 - 1), & c_2 \\ a_3, & b_3, & (c_3 - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Or, c'est là une égalité que *M. Brioschi* a très-simplement déduite d'une proposition plus générale de la théorie des déterminants.

Il est à remarquer que les plans représentés par les équations (1), (2), (3) sont perpendiculaires aux plans X'OX, Y'OY, Z'OZ, et passent par les bissectrices des angles X'OX, Y'OY, Z'OZ; de sorte que cette solution analytique conduit au procédé graphique que nous avons indiqué pour déterminer la droite cherchée. G.

QUESTION DU PROGRAMME OFFICIEL :

Equations les plus simples des hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes.

S'agit-il de trouver les équations des hyperboloïdes rapportés à leurs plans principaux, ou de représenter ces surfaces par des équations réduites au plus petit nombre de termes possible? La question ne manque pas d'intérêt pour les candidats à l'École Polytechnique, car, aux examens d'admission, on a proposé de réduire l'équation

$$x^2 + 2y^2 + 2yz = 1$$

à sa forme la *plus simple*.

L'équation des hyperboloïdes rapportés à leurs plans principaux est, comme on sait,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

Mais, la différence de carrés, $\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)$, peut être remplacée par un rectangle $\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \times \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)$, et il en résulte qu'au moyen d'une transformation de coordonnées, le premier membre de l'équation est réductible à deux termes. Pour effectuer cette réduction, il suffit de rapporter la surface aux trois plans

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad x = 0 \quad (*),$$

(*) Les deux premiers sont tangents au cône asymptote

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

et le troisième passe par les deux génératrices de contact.

puisque les fonctions $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$, $\frac{y}{b}-\frac{z}{c}$ deviennent alors des monômes.

D'après cela on voit que les hyperboloïdes peuvent toujours être représentés par une équation de la forme

$$Mx^2 + Nyz = P,$$

et cette équation est évidemment l'équation la plus simple des hyperboloïdes, si l'on fait consister la plus grande simplicité dans le plus petit nombre de termes.

La détermination des coefficients M, N, P de l'équation réduite ne présente aucune difficulté d'analyse; les valeurs de ces coefficients s'obtiennent par l'application des formules de la transformation des coordonnées.

Pour considérer le cas le plus général, supposons qu'un hyperboloïde soit, d'abord, donné par l'équation complète

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{array} \right.$$

La résolution des équations

$$f'_{(x)} = 0, \quad f'_{(y)} = 0, \quad f'_{(z)} = 0,$$

fera connaître les coordonnées α, β, γ du centre. Et, en en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, au centre, l'équation de l'hyperboloïde deviendra

$$(2) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = P,$$

en désignant par P la quantité connue

$$-(C\alpha + C'\beta + C''\gamma + D).$$

On pourra ensuite, par la décomposition en carrés de la fonction quadratique,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + 2B'xz + 2B''xy,$$

donner à l'équation (2) la forme

$$(3) \qquad F^2X^2 + G^2Y^2 - H^2Z^2 = P,$$

et il ne restera plus qu'à rapporter la surface aux trois plans

$$(4) \qquad GY + HZ = 0, \quad GY - HZ = 0, \quad X = 0,$$

pour que son équation se réduise à

$$(5) \qquad Mx^2 + Nyz = P.$$

Remarquons que pour établir les formules de transformation de coordonnées qui servent à rapporter la surface au système défini par les équations (4), il suffit de connaître les *cosinus* des angles que les nouveaux axes forment avec les anciens. Or les nouveaux axes ont pour équations

$$(Y = 0,\ Z = 0), \quad (GY + HZ = 0,\ X = 0),$$
$$(GY + HZ = 0,\ X = 0),$$

et l'on sait comment se déterminent les cosinus des angles qu'une droite forme avec les axes, lorsque ses équations sont données.

Comme exemple, considérons l'hyperboloïde à une nappe déterminé par l'équation

$$x^2 + 2y^2 + 2yz = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2y(y + z) = 1.$$

En rapportant la surface aux trois plans

$$y = 0, \quad y + z = 0, \quad x = 0,$$

son équation prend la forme

$$x^2 + h.yz = 1;$$

h est une constante dont il faut trouver la valeur.

Les nouveaux axes ont pour équations

$$(y=0,\ z=0),\quad (y+z=0,\ x=0),\quad (y=0,\ x=0);$$

il en résulte que si l'on désigne par

$$(\alpha, 6, \gamma),\quad (\alpha', 6', \gamma'),\quad (\alpha'', 6'', \gamma'')$$

les angles qu'ils forment avec les anciens axes supposés rectangulaires, on aura

$$\cos\alpha = 1,\quad \cos 6 = 0,\quad \cos\gamma = 0;$$

$$\cos\alpha' = 0,\quad \cos 6' = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\alpha'' = 0,\quad \cos 6'' = 0,\quad \cos\gamma'' = 1.$$

Par suite, les formules de la transformation des coordonnées deviendront

$$x = x',\quad y = -\frac{y'}{\sqrt{2}},\quad z = \frac{y'}{\sqrt{2}} + z'.$$

La substitution de ces expressions à x, y, z dans

$$x^2 + 2y(y+z) = 1$$

donne immédiatement

$$x'^2 - y'z'\sqrt{2} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 - yz\sqrt{2} = 1,$$

pour équation réduite au plus petit nombre de termes.

On trouvera de même que l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

se réduit à

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{4yz}{b^2 + c^2} = 1,$$

lorsqu'on rapporte l'hyperboloïde aux plans que les équa-

tions

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0,\quad x=0,$$

représentent G.

REMARQUE

Sur une proposition relative à la convexité et la concavité des courbes.

Dans la plupart des livres qui traitent de la construction des courbes, on trouve la proposition suivante :

Une courbe est, en un de ses points, convexe ou concave vers l'une des x, suivant que l'ordonnée de ce point et sa dérivée *seconde* ont le même signe, ou des signes contraires.

Il conviendrait, je crois, d'ajouter que cette proposition peut être en défaut dans le cas général des coordonnées obliques. L'hyperbole $xy=1$ en offre un exemple. Il est évident que pour tous les points de la branche située dans l'angle des coordonnées positives, l'ordonnée et sa dérivée seconde ont constamment le signe *plus*, et il n'est pas moins clair que si cet angle est aigu, une partie de la branche d'hyperbole qu'il contient, tourne sa convexité vers l'axe des x, tandis que l'autre partie est concave par rapport au même axe. G.

MÉTHODE D'ÉLIMINATION;

D'après M. CAYLEY.

1. *Lemme.* Soient m et n deux nombres entiers positifs, et $n>m$.

On a

$$x^m y^n - x^n y^m = x^m y^m (y - x)$$
$$\times (y^{n-m-1} + y^{n-m-2} x + y^{n-m-3} x^2 + \ldots).$$

Soient, 1°

$$\varphi x = ax + b = 0,$$
$$\psi(x) = \alpha x + \beta = 0,$$

on a

$$\frac{\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)}{y - x} = a\beta - \alpha b = \begin{vmatrix} a, & \alpha \\ b, & \beta \end{vmatrix},$$

égalant ce déterminant à zéro, on a la résultante des deux équations.

2°.

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$
$$\psi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

on obtient

$$\frac{\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)}{y - x}$$
$$= (b\alpha - \beta a)xy + (c\alpha - \gamma a)(x + y) + c\beta - \gamma b.$$

Représentons par $d_{ik} x^i y^k$ un terme quelconque de cette expression; il faut donner à i et à k les valeurs 0 et 1.

Posant

$$d_{00} = c\beta - \gamma b,$$
$$d_{11} = c\alpha - \gamma a,$$
$$d_{10} = c\alpha - \gamma a,$$
$$d_{11} = b\alpha - \beta a;$$

on aura

$$\begin{vmatrix} d_{10} & d_{01} \\ d_{10} & d_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

telle est la résultante.

3°.

$$\varphi x = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots = 0,$$
$$\psi(x) = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \ldots = 0.$$

Le quotient $\frac{\varphi(x)\psi(y)-\varphi(y)(\psi x)}{y-x}$. d'après le lemme I, est une fonction entière en x et y, où chaque terme est de la forme $d_{ik}x^iy^k$; par exemple, on a

$$(b\gamma-\beta\alpha)(x^{n-1}y^{n-2}x^{n-2}y^{n-1}),\quad i=n-1,\ k=n-2,\ \ldots;$$

d_{ik} est une fonction des coefficients des deux équations, et on a pour résultante le déterminant

$$\begin{vmatrix} 00 & 01 & 02 & \ldots\ldots & 0.n-1 \\ 10 & 11 & 12 & \ldots\ldots & 1.n-1 \\ 20 & 21 & 21 & \ldots\ldots & 2.n-1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ n-1.0. & n-1 & 1 & \ldots & n-1.n-1 \end{vmatrix} = 0;$$

le déterminant d est sous-entendu.

Observation. Cette méthode revient à la méthode dite *abrégée* de Bezout. (*Voir* Faa de Bruno, *Théor. générale de l'élimination*, p. 53.)

NOTE SUR LES FOYERS DES COURBES PLANES.

1. Soient

$$\tang\varphi = a + bi,$$
$$\tang\psi = a - bi;$$

on a

$$\tang(\varphi+\psi) = \frac{2a}{1-a^2-b^2} = \textit{réelle}.$$

Lorsque $a=0$, $\tang(\varphi+\psi)=0$.

$$\tang(\varphi-\psi) = \frac{2bi}{1+a^2+b^2};$$

si

$$a^2 + b^2 = 1,$$

alors

$$\text{tang}(\varphi - \psi) = bi.$$

2.

$$\text{tang}\,\varphi = i = -\frac{1}{i},$$

$$1 + \text{tang}^2\varphi = 0 = \frac{1}{\cos^2\varphi};$$

d'où

$$\cos\varphi = \infty$$

et, de même,

$$\sin\varphi = \infty.$$

3.

$$y = xi,$$

$$y = -\frac{x}{i},$$

deux droites imaginaires identiques et satisfaisant pourtant à la condition de la perpendicularité $aa' + 1 = 0$,

$$\text{tang}(\varphi + \psi) = \frac{i + \text{tang}\,\psi}{1 - i\,\text{tang}\,\psi} = \frac{(i + \text{tang}\,\psi)(i + i\,\text{tang}\,\psi)}{1 + \text{tang}^2\psi}$$
$$= (\sin\psi + i\cos\psi)(\cos\psi + i\sin\psi) = i = \text{tang}\,\varphi;$$

donc la droite imaginaire qui a pour équation $y = xi$, fait avec une droite quelconque un angle dont la tangente est constamment égale à i; résultat purement analytique: on suppose les axes rectangulaires.

4. Étant donnée une courbe plane C_n, si parmi les $n(n-1)$ tangentes qu'on peut mener d'un point x', y' situé dans le plan de la courbe, il s'en trouve *au moins* deux faisant avec l'axe des x, et par conséquent avec une droite quelconque, des angles dont les tangentes sont $\pm i$: ce point est un *foyer* de la courbe C_n.

C'est la définition qu'on doit à M. Plücker (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 433; t. XII, p. 225).

5. L'équation d'une courbe est satisfaite par une infinité de valeurs imaginaires des coordonnées; c'est *dans ce sens* qu'on dit qu'une courbe passe par une infinité de *points imaginaires*, et de même une courbe a une infinité de *tangentes imaginaires*, et sur chaque tangente imaginaire on peut trouver un point réel, mais un seul, car deux donneraient une tangente réelle. A toute tangente imaginaire correspond un point imaginaire sur la polaire réciproque, et, *vice versâ*, à tout point imaginaire de la polaire réciproque correspond une tangente imaginaire de la courbe donnée. La recherche d'un foyer se ramène donc à trouver sur la polaire réciproque un point imaginaire dont la polaire, par rapport à la conique directrice, soit de la forme $x + iy = q$, et si nous parvenons à déterminer un *point réel* sur cette tangente imaginaire, ce point réel est un foyer; conformément à la définition Plücker, on suppose les axes rectangulaires, afin que i soit la tangente de la droite avec l'axe des x.

6. Soit donc

$$U = 0$$

l'équation d'une courbe de degré n et de classe p, axes rectangulaires, et coordonnées trilitères x, y, z.

Prenons pour conique directrice le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

et soit

$$u = 0$$

la polaire réciproque de U; elle sera de degré p et de classe n.

Prenons sur cette ligne le point x', y', z'; la polaire de ce point, relativement au cercle, a pour équation

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

Faisons

$$x' = 1, \quad y' = i;$$

l'équation

$$u = 0$$

devient une équation en z de degré p. Soit $x_1 + yi_1$ une racine de cette équation où x_1 et y_1 sont des quantités réelles; la polaire réciproque passe donc par le point imaginaire $x', y', x_1 + iy_1$, et la polaire de ce point est

$$xx' + yy' + z(x_1 + iy_1) = 0,$$

droite imaginaire tangente à la courbe $U = 0$, et dont le coefficient angulaire est i.

L'équation de cette polaire, ayant égard aux valeurs x', y', est satisfaite en prenant

$$x = -x_1, \quad y = -y_1, \quad z = 1;$$

cette droite imaginaire passe donc par le point réel x_1, y_1, 1; ce point est donc un foyer. Pour avoir les valeurs x_1, y_1, on remplace x, y, z par 1, i, $x_1 + iy_1$ dans $u = 0$, et l'équation se partage en deux autres équations en x_1, y_1, à coefficients réels, chacune de degré p : il y a donc au plus p^2 foyers.

7. Les équations des tangentes imaginaires qui passent par les deux foyers sont donc

$$x - x_1 + i(y - y_1) = 0,$$
$$x - x_1 - i(y - y_1) = 0.$$

Décrivons un cercle quelconque ayant pour équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + F = 1;$$

les deux asymptotes imaginaires de ce cercle ont pour équations

$$x - x_1 \pm i(y - y_1) = 0;$$

ce cercle passe donc par deux points imaginaires situés à l'infini; désignons-les par I′, I″. Les tangentes menées de ces points à la courbe U, sont précisément *des tangentes focales*; p de ces tangentes partent de I′ et p autres de I″ et pas davantage, puisque la courbe U est de la classe p. Les intersections de ces deux faisceaux donnent les p^2 foyers : ainsi chaque rayon du faisceau I′ coupe le faisceau I″ en p points, mais dont un seul est réel; c'est celui qui est donné par l'intersection de deux rayons $x - x_1 \pm i(y - y_1) = 0$. Il n'y a donc que p foyers réels et $p^2 - p$ (nombre pair) foyers imaginaires. Le nombre de foyers réels est donc égal au nombre qui désigne la classe de la courbe.

8. *Exemple*. Soit.

$$U = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0,$$
$$D = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - bb'b'' = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

on aura

$$u = D_a x^2 + D_{a'} y^2 + D_{a''} z^2 + 2D_b yz + 2D_{b'} zx + D_{b''} xy = 0.$$

où D_a est la dérivée de D par rapport à a, etc.

Faisons

$$x = 1, \quad y = i, \quad z = x_1 + iy_1,$$

et séparant les équations, on obtient

$$D_{a''}(x_1^2 - y_1^2) + 2D_{b'}x_1 - 2D_b y_1 + D_a - D_{a'} = 0,$$
$$D_{a''}x_1 y_1 + D_b x_1 + D_{b'} y_1 + D_{b''} = 0,$$

deux hyperboles équilatères dont les intersections donnent les foyers; deux intersections réelles et deux imaginaires. La discussion ne présente nulle difficulté.

DISCUSSION D'UN PROBLÈME RELATIF A LA CONSTRUCTION DES CONIQUES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Dans le tome XVI des *Nouvelles Annales*, pages 116 et suivantes, j'ai fait quelques applications des théories de la *Géométrie supérieure* à la construction des coniques déterminées par cinq conditions (points ou tangentes). Quoique les solutions que j'ai développées soient très-simples, il en est deux qui paraissent ne pas avoir été parfaitement comprises par tous les lecteurs; je veux parler de celles où il s'agit de construire une conique qui passe par trois points et qui touche deux droites données, et de sa corrélative par voie de dualité, où les données sont trois tangentes et deux points.

Je vais faire voir que les difficultés qu'on a cru remarquer n'existent pas, et que les solutions que j'ai données pour ces deux cas sont aussi complètes que les autres.

Dans le premier cas, où les données sont trois points a, b, c et deux tangentes, la solution que j'ai indiquée consiste à déterminer à la fois deux autres points de la conique, savoir, les points de contact des tangentes données, en construisant la corde de contact qui les joint. A cet effet, sur le côté ab du triangle inscrit donné abc, on trouve un point 1 appartenant à cette corde de contact, et pareillement un point 3 sur le côté bc. Or le point 1 ne s'obtient pas isolément sur ab; car c'est un des deux *points-doubles* d'une involution dont le segment ab fait partie, et l'autre point-double 2 de cette involution satisfait également à la question. Par la même raison, le point

3 s'obtient, sur *bc*, en même temps qu'un autre point 4, qui jouit des mêmes propriétés que lui. Donc, au lieu d'une corde de contact, on en trouve quatre qui sont : 13, 14, 23, 24, et qui fournissent quatre solutions distinctes du problème proposé.

Actuellement, si l'on considère le côté *ca*, on y trouve de même deux points 5 et 6, par chacun desquels doit passer une des cordes de contact cherchées. Donc si les points 1, 2; 3, 4; 5, 6, conjugués deux à deux, ne présentaient aucune particularité dans leurs situations relatives, la question admettrait douze solutions, puisque, indépendamment des quatre cordes de contact déjà trouvées, on aurait encore les huit suivantes, savoir : 15, 16, 25, 26, 35, 36, 45, 46.

Mais il est aisé de voir que les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont situés, trois à trois, sur quatre droites, c'est-à-dire qu'ils sont les quatre sommets et les deux points de concours des côtés opposés d'un même quadrilatère, et qu'ainsi ils ne donnent lieu qu'à quatre droites distinctes.

En effet, les points 1, 2 divisent harmoniquement le segment *ab*, puisqu'ils sont les points-doubles d'une involution dont ce segment fait partie.

Pareillement, les points 3, 4 divisent harmoniquement *bc*, et les points 5, 6 divisent harmoniquement *ca*. Donc le théorème 375 de la *Géométrie supérieure* trouve ici son application; ce qui démontre l'assertion émise ci-dessus.

Une difficulté analogue se présente dans la question corrélative, où les données sont trois tangentes et deux points *ab*; et au premier abord il semble, comme dans le problème précédent, qu'il y ait douze solutions; mais les six droites auxiliaires (corrélatives des six points 1, 2, 3, 4, 5, 6), qui conduisent ici à la solution, sont les quatre côtés et les deux diagonales d'un même quadrila-

tère ; elles se coupent donc, trois à trois, en quatre points, et ces points sont les *pôles* cherchés de la corde inscrite *ab*, relatifs aux quatre coniques qui seules satisfont à la question proposée. Je laisse au lecteur le soin facile de trouver comment cette conclusion résulte du théorème 373 de la *Géométrie supérieure*, page 277.

Ainsi, chacun de ces deux problèmes n'admet pas d'autre solution que les quatre que j'ai mentionnées dans l'article précité des *Nouvelles Annales*.

ADDITION A LA SOLUTION DE LA QUESTION 443

(voir p. 261);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Dans l'article dont il s'agit, j'ai dit (page 263, ligne 9), que *la courbe du troisième ordre, lieu des points de rencontre des normales menées à une conique par les deux points où une transversale, issue d'un point fixe, coupe cette conique, n'a qu'une asymptote réelle*. Cette assertion est trop générale. Quand la conique donnée est une hyperbole, les trois asymptotes sont réelles.

En effet menons, par le point fixe, une parallèle à une asymptote de la conique, et soit *a* le point où elle rencontre cette courbe à distance finie. La normale au point situé à l'infini est la droite de l'infini elle-même ; donc le point de rencontre de cette normale avec la normale en *a*, est situé à l'infini sur cette dernière droite, et il appartient à la courbe du troisième ordre. Pareillement, le point situé à l'infini sur la normale menée à la conique par le point *b*, où cette courbe est rencontrée par une parallèle à la seconde asymptote de la conique issue du point fixe, appartient à la courbe du troisième ordre.

Donc les normales à la conique aux points a et b déterminent les directions des deux asymptotes de la courbe du troisième ordre, autres que celle, toujours réelle, que j'avais mentionnée seule (*). Si la conique est une ellipse, une seule asymptote est réelle, comme je l'ai dit. Enfin, si c'est une parabole, auquel cas la courbe du troisième ordre se compose d'une conique et d'une droite, cette droite représente à elle seule la direction de l'asymptote toujours réelle du cas général, et celles des deux autres asymptotes qui sont alors coïncidentes; d'où l'on peut conclure que cette conique est elle-même une parabole dont l'axe focal est parallèle à la droite dont il s'agit.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 89);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

CHAPITRE III.

CÔNES ET CYLINDRES.

§ I. — *Conditions pour qu'une équation de degré quelconque représente une surface conique ou une surface cylindrique.*

57. Nous avons remarqué, dans la discussion des surfaces du second ordre, que l'équation du second degré représentait un cône lorsque le discriminant ou le *Hessien* de cette fonction était nul, et un cylindre, lorsque le Hessien et la dérivée du Hessien par rapport au paramètre a_{44} étaient nuls tous deux. Je vais généraliser ce

(*) Ces asymptotes sont peut-être du genre parabolique. TM.

théorème, en cherchant les conditions analogues pour une équation de degré quelconque.

Le théorème relatif aux surfaces coniques a été donné par M. Hesse, et se trouve reproduit dans l'ouvrage de M. Brioschi sur les déterminants et dans les *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 398. Quant au théorème sur les surfaces cylindriques, je ne crois pas qu'il ait encore été énoncé.

58. Si $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ représentent les coordonnées d'un point situé sur la surface dont l'équation est

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{1}$$

on sait que l'équation du plan tangent en ce point est

$$X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3 + X_4 u_4 = 0, \tag{2}$$

$\frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4}$ désignant les coordonnées d'un point quelconque de ce plan, et

$$u_r = \frac{du}{dx_r}. \tag{3}$$

59. Lorsque l'équation (1) appartient à une *surface conique*, le plan tangent jouit de la propriété caractéristique de passer constamment par un point fixe. Cette propriété sera traduite par l'identité suivante :

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0, \tag{4}$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont des constantes.

En différentiant cette identité successivement par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4, on en conclut

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{21} + \alpha_3 u_{31} + \alpha_4 u_{41} = 0, \\ \alpha_1 u_{12} + \alpha_2 u_{22} + \alpha_3 u_{32} + \alpha_4 u_{42} = 0, \\ \alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{23} + x_3 \alpha_{33} + \alpha_4 u_{43} = 0, \\ \alpha_1 u_{14} + \alpha_2 u_{24} + \alpha_3 u_{34} + \alpha_4 u_{44} = 0, \end{array}\right. \tag{5}$$

après avoir posé

$$(6) \qquad u_{r,s} = u_{s,r} = \frac{d^2 u}{dx_r\, dx_s} = \frac{d^2 u}{dx_s\, dx_r}.$$

La simultanéité des quatre équations (5) entraîne comme conséquence immédiate

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

ce déterminant est ce qu'on appelle le *Hessien* de la fonction u; je le désignerai désormais par H_u.

Donc, *si l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface conique, le Hessien de la fonction u *est identiquement nul.*

60. Il faut maintenant établir la réciproque de cette proposition.

La formule

$$(8) \qquad H_u \frac{d^2 H_u}{du_{r,s}\, du_{r_1,s_1}} = \frac{dH_u}{du_{r,s}} \frac{dH_u}{du_{r_1,s_1}} - \frac{dH_u}{du_{r,s_1}} \frac{dH_u}{du_{r_1,s}}$$

conduit à l'identité

$$(9) \qquad \frac{dH_u}{du_{r,r}} \frac{dH_u}{du_{s,s}} = \left(\frac{dH_u}{du_{r,s}}\right)^2,$$

par suite de l'hypothèse $H_u = 0$.

Mais les fonctions $\frac{dH_u}{du_{r,s}}$ sont toutes du même degré; et comme l'identité (9) exige que tous les diviseurs linéaires de $\frac{dH_u}{du_{r,r}}$ appartiennent aussi à la fonction $\frac{dH_u}{du_{r,s}}$, nous en

conclurons

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dH_u}{du_{r,s}} &= k\frac{dH_u}{du_{r,r}},\\ \frac{dH_u}{du_{r,s_1}} &= k_1\frac{dH_u}{du_{r,r}},\end{aligned}\right.$$

k et k_1 désignant des constantes.

On déduit de ces dernières relations

$$(11)\quad \frac{\dfrac{dH_u}{du_{r,s}}}{\dfrac{dH_u}{du_{r,s_1}}} = \text{constante}.$$

En donnant à s_1 la valeur 4, et en faisant successivement $s = 1, 2, 3$, on obtient enfin

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dH_u}{du_{1,r}} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_4}\frac{dH_u}{du_{4,r}},\\ \frac{dH_u}{du_{2,r}} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_4}\frac{dH_u}{du_{4,r}},\\ \frac{dH_u}{du_{3,r}} &= \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\frac{dH_u}{du_{4,r}}.\end{aligned}\right.$$

Les quantités $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ sont des constantes.

Or l'homogénéité de la fonction u et de ses dérivées conduit aux identités

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} (m-1)u_1 &= x_1u_{11} + x_2u_{12} + x_3u_{13} + x_4u_{14},\\ (m-1)u_2 &= x_1u_{21} + x_2u_{22} + x_3u_{23} + x_4u_{24},\\ (m-1)u_3 &= x_1u_{31} + x_2u_{32} + x_3u_{33} + x_4u_{34},\\ (m-1)u_4 &= x_1u_{41} + x_2u_{42} + x_3u_{43} + x_4u_{44},\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit

$$x_r\frac{H_u}{m-1} = u_1\frac{dH_u}{du_{1,r}} + u_2\frac{dH_u}{du_{2,r}} + u_3\frac{dH_u}{du_{3,r}} + u_4\frac{dH_u}{du_{4,r}}.$$

Si l'on remarque que H_u est nul, par hypothèse, et qu'on ait égard aux équations (12), cette identité prendra la forme suivante

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0.$$

Mais cette relation exprime que le plan tangent à la surface $u = 0$ passe par le point fixe $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$; donc l'*équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

appartient à une surface conique. C. Q. F. D.

Les coordonnées $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ du sommet sont données par les équations

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_4} &= \frac{\frac{d H_u}{du_{1,r}}}{\frac{d H_u}{du_{4,r}}}, \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_4} &= \frac{\frac{d H_u}{du_{2,r}}}{\frac{d H_u}{du_{4,r}}}, \\ \frac{\alpha_3}{\alpha_4} &= \frac{\frac{d H_u}{du_{3,r}}}{\frac{d H_u}{du_{4,r}}}. \end{aligned} \right.$$

61. Lorsque l'équation

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique, le plan tangent jouit de la propriété d'être constamment parallèle à une même droite, propriété qui sera traduite par l'identité suivante

$$(15)\qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0,$$

α_1, α_2, α_3 désignant des constantes.

En différentiant cette identité successivement par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4, on obtient

$$(16)\quad \begin{cases} \alpha_1 u_{11} + \alpha_2 u_{21} + \alpha_3 u_{31} = 0, \\ \alpha_1 u_{12} + \alpha_2 u_{22} + \alpha_3 u_{32} = 0, \\ \alpha_1 u_{13} + \alpha_2 u_{23} + \alpha_3 u_{33} = 0, \\ \alpha_1 u_{14} + \alpha_2 u_{24} + \alpha_3 u_{34} = 0. \end{cases}$$

Prenant ces équations trois à trois, on en conclut les identités

$$\frac{d\mathrm{H}_u}{du_{44}} = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}_u}{du_{43}} = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}_u}{du_{42}} = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}_u}{du_{41}} = 0.$$

Or

$$\mathrm{H}_u = u_{41}\frac{d\mathrm{H}_u}{du_{41}} + u_{42}\frac{d\mathrm{H}_u}{du_{42}} + u_{43}\frac{d\mathrm{H}_u}{au_{43}} + u_{44}\frac{d\mathrm{H}_u}{du_{44}};$$

donc on a, en vertu des relations précédentes,

$$\mathrm{H}_u = 0.$$

Ainsi, *lorsque l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique, on a nécessairement

$$\mathrm{H}_u = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}_u}{du_{44}} = 0;$$

c'est-à-dire *que le Hessien de la fonction* u *et la dérivée du Hessien par rapport à* u_{44} *sont identiquement nuls.*

62. Réciproquement, *si le Hessien de la fonction* u *et la dérivée du Hessien par rapport à* u_{44} *sont identiquement nuls, l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique.

De la formule

$$(17) \qquad H_u \frac{d^2 H_u}{du_{r,r}\, du_{s,s}} = \frac{d H_u}{du_{r,r}} \frac{d H_u}{du_{s,s}} - \left(\frac{d H_u}{du_{r,s}}\right)^2,$$

on conclut d'abord

$$\frac{d H_u}{du_{r,r}} \frac{d H_u}{du_{s,s}} = \left(\frac{d H_u}{du_{r,s}}\right)^2,$$

puisque

$$H_u = 0;$$

mais on a aussi

$$\frac{d H_u}{du_{44}} = 0;$$

donc

$$(18) \qquad \frac{d H_u}{du_{4,r}} = \frac{d H_u}{du_{r,4}} = 0.$$

En raisonnant comme dans la réciproque précédente, on obtiendra les identités

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d H_u}{du_{1,r}} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \frac{d H_u}{du_{3,r}}, \\ \frac{d H_u}{du_{2,r}} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \frac{d H_u}{du_{3,r}}, \end{aligned} \right.$$

qui ont lieu pour des valeurs de r différentes de 4 et dans lesquelles α_1, α_2, α_3 représentent des constantes.

En ayant égard aux relations (18) et (19), l'identité

$$x_r \frac{H_u}{m-1} = u_1 \frac{d H_u}{du_{1,r}} + u_2 \frac{d H_u}{du_{2,r}} + u_3 \frac{d H_u}{du_{3,r}} + u_4 \frac{d H_u}{du_{4,r}}$$

deviendra

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0.$$

Or cette relation exprime que le plan tangent à la surface $u = 0$ est constamment parallèle à une droite fixe; donc

l'équation

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique. C. Q. F. D.

La direction des génératrices est donnée par les équations

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha_1}{\alpha_3} &= \frac{\dfrac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{1,r}}}{\dfrac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{3,r}}}, \\ \frac{\alpha_2}{x_3} &= \frac{\dfrac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{2,r}}}{\dfrac{d\,\mathrm{H}_u}{du_{3,r}}}, \end{aligned} \right.$$

r étant différent de 4. α_1, α_2, α_3 sont proportionnels aux cosinus des angles de la direction des génératrices avec les axes des x_1, x_2, x_3.

63. La démonstration de ces deux théorèmes peut encore se présenter d'une autre manière. Le principe de cette seconde démonstration est le même que celui qui a été adopté par M. Brioschi, dans l'ouvrage déjà cité, pour la proposition relative aux surfaces coniques.

La fonction homogène $u(x_1, x_2, x_3, x_4)$ deviendra, par la transformation linéaire,

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4, \\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4, \\ x_4 &= a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4, \end{aligned} \right.$$

une fonction homogène de y_1, y_2, y_3, y_4 que je désignerai par $v(y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Or on a évidemment

$$(22)\quad \frac{dv}{dy_r} = v_r = u_1 a_{1,r} + u_2 a_{2,r} + u_3 a_{3,r} + u_4 a_{4,r};$$

d'où

$$(23)\quad \frac{d^2v}{dy_r\,dy_s} = v_{r,s} = A_{1,r}a_{1,r} + A_{2,s}a_{2,r} + A_{3,s}a_{3,r} + A_{4,s}a_{4,r},$$

après avoir posé

$$(24)\qquad A_{r,s} = \frac{du_r}{dy_s}.$$

D'après la multiplication des déterminants, il résulte immédiatement

$$(25)\qquad H_r = P.Q;$$

égalité dans laquelle

$$P_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$H_r = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$$

D'un autre côté, on a

$$(26)\quad A_{r,s} = \frac{du_r}{dy_s} = u_{r,1}a_{1,s} + u_{r,2}a_{2,s} + u_{r,3}a_{3,s} + u_{r,4}a_{4,s},$$

d'où l'on conclut, d'après les mêmes principes,

$$(27)\qquad Q = P.H_u,$$

H_u désignant le Hessien de la fonction u.

Les formules qui précèdent conduisent facilement aux relations suivantes que je me contenterai d'énoncer :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dH_v}{dv_{r,s}} &= \frac{dP}{da_{1,r}}\frac{dQ}{dA_{1,s}} + \frac{dP}{da_{2,r}}\frac{dQ}{dA_{2,s}} \\ &\quad + \frac{dP}{da_{3,r}}\frac{dQ}{dA_{3,r}} + \frac{dP}{da_{4,r}}\frac{dQ}{dA_{4,s}}, \\ \frac{dQ}{dA_{r,s}} &= \frac{dH_u}{du_{r,1}}\frac{dP}{da_{1,s}} + \frac{dH_u}{du_{r,2}}\frac{dP}{da_{2,s}} \\ &\quad + \frac{dH_u}{du_{r,3}}\frac{dP}{da_{3,s}} + \frac{dH_u}{du_{r,4}}\frac{dP}{da_{4,s}}. \end{aligned}\right.$$

64. Ces préliminaires étant posés, passons à la question géométrique.

Les coordonnées d'un point quelconque étant représentées par $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$, j'effectue la transformation de coordonnées suivantes :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + a_{13}\,y_3 + a_{14}\,y_4, \\ x_2 &= a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + a_{23}\,y_3 + a_{24}\,y_4, \\ x_3 &= a_{31}\,y_1 + a_{32}\,y_2 + a_{33}\,y_3 + a_{34}\,y_4, \\ x_4 &= 0\,.\,y_1 + 0\,.\,y_2 + 0\,.\,y_3 + a_{44}\,y_4, \end{aligned}\right.$$

de sorte que les nouvelles coordonnées du même point seront $\frac{y_1}{y_4}$, $\frac{y_2}{y_4}$, $\frac{y_3}{y_4}$.

Si l'on pose

$$P_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

on aura, après avoir introduit l'hypothèse,

$$
(30)\quad\left\{\begin{array}{l}
a_{41}=a_{42}=a_{43}=0,\\
P=a_{44}P_1,\\
\dfrac{dP}{da_{14}}=0,\quad \dfrac{dP}{da_{24}}=0,\quad \dfrac{dP}{da_{34}}=0,\quad \dfrac{dP}{da_{44}}=0.
\end{array}\right.
$$

Les relations (25), (27) et (30) donneront alors

$$(31)\qquad H_v=a_{44}^2 P_1^2 H_u,$$

et les relations (28) et (30) conduiront à

$$(32)\qquad \frac{dH_v}{dv_{44}}=P_1^2\frac{dH_u}{du_{44}}.$$

Les équations (31) et (32) sont la base de la seconde démonstration que je vais exposer.

65. Si l'équation

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$$

représente une surface conique, on pourra toujours opérer une transformation de coordonnées telle, que le cône se trouve rapporté à son sommet, et, par suite, que l'équation

$$v(y_1, y_2, y_3, y_4)=0$$

soit homogène en y_1, y_2, y_3; ce qui entraîne, comme conséquence nécessaire,

$$\frac{d^2v}{dy_1\,dy_4}=\frac{d^2v}{dy_2\,dy_4}=\frac{d^2v}{dy_3\,dy_4}=\frac{d^2v}{dy_4^2}=0,$$

c'est-à-dire

$$v_{14}=v_{24}=v_{34}=v_{44}=0.$$

Mais alors le Hessien H_v est identiquement nul; donc, en vertu de la relation (31), il en est de même du Hessien H_u.

Ainsi, *lorsque l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface conique, le Hessien de la fonction u *est identiquement nul.*

Il n'était même pas nécessaire d'opérer la transformation générale (29) pour arriver à cette conséquence; mais comme elle est indispensable pour le cas du cylindre, j'ai préféré déduire les deux théorèmes d'une transformation unique.

Pour démontrer la réciproque de cette proposition, on établira d'abord, en adoptant le raisonnement exposé dans le n° 60, l'identité

$$(33) \qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0.$$

Ceci posé, on voit immédiatement que la transformation linéaire

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{14} y_3 + \lambda\alpha_1 y_4, \\ x_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 + \lambda\alpha_2 y_4, \\ x_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 + \lambda\alpha_3 y_4, \\ x_4 &= 0 . y_1 + 0 . y_2 + 0 . y_3 + \lambda\alpha_4 y_4 \end{aligned}\right.$$

conduit à une équation

$$v(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

homogène en y_1, y_2, y_3. En effet, cette équation étant homogène en y_1, y_2, y_3, y_4, il suffit de constater que le premier membre est indépendant de la variable y_4, c'est-à-dire que

$$\frac{dv}{dy_4} = 0.$$

Or

$$\frac{dv}{dy_4} = u_1 \lambda\alpha_1 + u_2 \lambda\alpha_2 + u_3 \lambda\alpha_3 + u_4 \lambda\alpha_4;$$

mais le second membre est nul, d'après l'identité (33); et la réciproque se trouve ainsi démontrée.

66. Si l'équation

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique, on pourra toujours opérer une transformation de coordonnées telle, que le cylindre se trouve parallèle à l'un des axes, celui des y_3 par exemple; par suite, l'équation

$$v(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$$

ne devra pas renfermer de termes en y_3; ce qui entraîne comme conséquence

$$\frac{d^2 v}{dy_1\, dy_3} = \frac{d^2 v}{dy_2\, dy_3} = \frac{d^2 v}{dy_3^2} = \frac{d^2 v}{dy_4\, dy_3} = 0.$$

On voit alors que le Hessien H_v et la dérivée $\frac{dH_v}{du_{44}}$ sont identiquement nuls; donc, en vertu des relations (31) et (32), il en est de même de H_u et de $\frac{dH_u}{du_{44}}$.

Ainsi lorsque *l'équation*

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

représente une surface cylindrique, le Hessien de la fonction u *ainsi que la dérivée du Hessien par rapport à* $u_{4,4}$ *sont identiquement nuls.*

Pour démontrer la réciproque, on établira, comme il a été fait au n° 62, l'identité

$$(34) \qquad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0.$$

Ceci posé, on voit immédiatement que la transforma-

tion linéaire

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \lambda\alpha_1 y_3 + a_{14}y_4,\\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \lambda\alpha_2 y_3 + a_{24}y_4,\\ x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + \lambda\alpha_3 y_3 + a_{34}y_4,\\ x_4 &= 0.y_1 + 0.y_2 + 0.y_3 + a_{44}y_4,\end{aligned}\right.$$

conduit à une équation

$$v(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

qui sera homogène en y_1, y_2, y_4. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que la dérivée $\frac{dv}{dy_3}$ est identiquement nulle. Or on a

$$\frac{dv}{dy_3} = u_1\lambda\alpha_1 + u_2\lambda\alpha_2 + u_3\lambda\alpha_3;$$

d'où l'on conclut, d'après la relation (34),

$$\frac{dv}{dy_3} = 0.$$

Les deux conditions énoncées sont donc nécessaires et suffisantes.

(*La suite prochainement.*)

INVARIANTS [suite (*)] ET SOLUTION DES QUESTIONS 387 ET 412

(voir t. XVII, p. 301);

PAR M. BLERZY,
Directeur des lignes télégraphiques, à la Rochelle.

1. Les trois formules générales d'invariants que j'ai

(*) Je viens de retrouver ce précieux travail qui date de 1858, et que j'avais malheureusement égaré. TM.

données précédemment (tome XVII) sont homogènes en exposants et en indices. Il est facile de démontrer que cette propriété s'étend à tous les invariants simples.

Je suppose qu'un invariant I puisse se décomposer en deux parties, l'une I_{nn_1} d'exposant n et d'indice n_1, l'autre I_{n',n'_1} d'exposant n' et d'indice n'_1. En effectuant sur I l'opération indiquée par $\sum ia_{i-1}\frac{dI}{da_i}$, on obtient une fonction composée de deux espèces de termes : les uns provenant de I_{n,n_1} sont d'exposant n et d'indice $n_1 - 1$, les autres provenant de I_{n',n'_1} sont d'exposant n' et d'indice $n'_1 - 1$, et la somme de ces termes étant nulle indépendamment des valeurs particulières attribuées aux coefficients a_i, on doit avoir séparément

$$\sum ia_{i-1}\frac{dI_{n,n_1}}{da_i} = 0 \quad \text{et} \quad \sum ia_{i-1}\frac{dI_{n',n'_1}}{da_i} = 0,$$

c'est-à-dire que I est la somme de deux invariants simples.

En général les fonctions qui expriment les données d'une question étant prises toutes sous forme homogène tant en indices qu'en exposants, les fonctions algébriques effectuées sur ces fonctions ne donneront jamais que des résultats homogènes, ce qui est un utile moyen de contrôle de l'exactitude des calculs.

2. Il résulte des deux conditions d'homogénéité et de symétrie qu'une fonction impaire ne peut avoir d'invariant d'ordre impair en exposant et n'a pas d'invariant du second degré. C'est facile à démontrer.

On peut en conclure aussi, comme cas particulier d'un théorème *probablement* général, que

$$f_6 = ax^6 + 6a_1x^5 + 15a_2x^4 + 20a_3x^3 + 15a_4x^2 + 6a_5x + a_6.$$

n'a pas d'invariant du troisième degré; car cet invariant

serait de la forme

$$I = m.a_0 a_3 a_6 + n.a_1 a_3 a_5 + p.a_2 a_3 a_4 + q(a_0 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_6)$$
$$+ r(a_1 a_4^2 + a_2^2 a_5) + s a_3^3,$$

et en cherchant à déterminer les coefficients m, n, p, q, r, s par la condition

$$\sum_1^6 i a_{i-1} \frac{dI}{da_i} = 0,$$

on trouve que tous ces coefficients doivent être nuls.

3. Les propriétés des invariants dont j'ai parlé jusqu'ici semblent purement théoriques ; quelques exemples montreront l'importance que ces fonctions sont appelées à prendre dans l'étude algébrique des équations.

Je commencerai par établir deux formules très-utiles et qui résultent de la notation symbolique

$$f_n = (a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, 1)^n$$
$$= a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + n a_{n-1} x + a_n.$$

La formule de Taylor appliquée aux fonctions entières et rationnelles donne

$$f_m(x+y) = \frac{\frac{d^m f_m}{dy^m}}{1.2.3\ldots m} x^m + \frac{\frac{d^{m-1} f_m}{dy^{m-1}}}{1.2\ldots m-1} x^{m-1} \ldots$$
$$+ \frac{\frac{d^2 f_m}{dy^2}}{1.2} x^2 + \frac{\frac{df_m}{dy}}{1} x + f_m;$$

or

$$f_m = a_0 y^m + m a_1 y^{m-1} + \ldots,$$

$$\frac{df_m}{dy} = m \left[\begin{array}{c} a_0 y^{m-1} + (m-1) a_1 y^{m-2} \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} a_2 y^{m-3} + \ldots + a_{m-1} \end{array} \right] = m f_{m-1},$$

donc

$$\frac{\frac{df_m}{dy}}{1} = mf_{m-1}.$$

De même

$$\frac{d^2 f_m}{dy^2} = m\,\frac{df_{m-1}}{dy} = m(m-1)f_{m-2},$$

et par suite

$$\frac{\frac{d^2 f_m}{dy^2}}{1.2} = \frac{m(m-1)}{1.2} f_{m-2},$$

et en général

$$\frac{\frac{d^i f_m}{dy^i}}{1.2\ldots i} = \frac{m(m-1)-(m-i+1)}{1.2\ldots i} f_{m-i};$$

d'où

$$f_m(x+y) = f_0.x^m + mf_1.x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} f_2.x^{m-2} + \ldots$$
$$+ mf_{m-1}.x + f_m.$$

4. Cherchons, au moyen de cette formule, à faire disparaître le deuxième terme d'une équation. Il faut poser

$$f_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_0 y + a_1 = 0$$

ou

$$y = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Il vient

$$f_m\left(x - \frac{a_1}{a_0}\right) = a_0 x^m + \frac{m(m-1)}{1.2} f_2\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) x^{m-2} + \ldots$$
$$+ mf_{m-1}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) x + f_m\left(-\frac{a_1}{a_0}\right),$$

et en remplaçant $x - \frac{a_1}{a_0}$ par x, c'est-à-dire x par $\frac{a_0 x + a_1}{a_0}$, et multipliant par a_0^{m-1}, on obtient enfin l'identité

$$a_0^{m-1} . f_m(x) = (a_0 x + a_1)^m$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} a_0 f_2\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)(a_0 x + a_1)^{m-2} + \ldots$$
$$+ a_0^{m-1} . f_m\left(-\frac{a_1}{a_0}\right),$$

dans laquelle

$$a_0^{i-1} . f_i\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0^{i-1} a_i - i a_0^{i-2} a_1 a_{i-1}$$
$$+ \frac{i(i-1)}{1.2} a_0^{i-3} a_1^2 a_{i-2} + \ldots \mp \frac{i(i-1)}{1.2} a_0 a_2^{i-2} a_2 \pm (i-1) a_1^i.$$

Les signes supérieurs s'appliquent au cas de i impair et les signes inférieurs au cas de i pair.

Cette formule me servira plus loin pour transporter aux équations générales

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots = 0$$

les propriétés reconnues sous la forme

$$x^m + px^{m-2} + \ldots = 0.$$

Comme

$$a_0 f_2\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0 a_2 - a_1^2,$$

on voit tout de suite, par application de la règle de Descartes, que

$$a_0 a_2 - a_1^2 < 0$$

est une condition de réalité des racines pour les équations de tous les degrés.

5. Dans ce qui suivra, je désignerai, pour simplifier

l'écriture, par

$$\varpi, \quad \varphi, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \chi$$

les invariants

$$I_2, \quad I_{3,4}, \quad I_{4,2}, \quad I_{4,3}, \quad I_{6,2} \text{ (*)}.$$

On vérifie facilement les relations que voici :

$$a_0 \mu = \varpi\lambda - \varphi,$$

$$a_0 f_2\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0 a_2 - a_1^2 = \varpi,$$

$$\left[a_0^2 f_3\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)\right]^2 = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)^2 = a_0^2\varphi - 4\varpi^3$$
$$= a_0^2\varpi\lambda - a_0^3\mu - 4\varpi^3,$$

$$a^3 f_4\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0^3 a_4 - 4a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 3a_1^4$$
$$= a_0^2\lambda - 3\varpi^2,$$

$$a_0^5 f_6\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0^5 a_6 - 6a_0^4 a_1 a_5 + 15a_0^3 a_1^2 a_4 - 20a_0^2 a_1^3 a_3$$
$$+ 15a_0 a_1^4 a_2 - 5a_1^6$$
$$= a_0^4\chi - 5a_0^2\varpi\lambda - 10a_0^3\mu + 5\varpi^3.$$

En désignant par D_m le discriminant de f_m, on sait en outre que

$$D_4 = \lambda^2 - 27\mu^2.$$

6. La formule du n° 4 appliquée à l'équation du troisième degré donne

$$a_0^2(a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3)$$
$$= (a_0 x + a_1)^3 + 3(a_0 a_2 - a_1^2)(a_0 x + a_1)$$
$$+ (a_0^2 a_3 - 3a_1 a_2 a_3 + 2a_1^3)$$
$$= (a_0 x + a_1)^3 + 3\varpi(a_0 x + a_1) \pm \sqrt{a_0^2\varphi - 4\varpi^3}.$$

L'ambiguïté du signe du radical introduit est sans importance, ce radical devant toujours par la suite être élevé au carré.

(*) *Voir* t. XVII, p. 301. TM.

On calcule facilement par la méthode de Lagrange l'équation aux carrés des différences de

$$x^3 + px + q = 0,$$

on trouve

$$V^3 + 6pV^2 + 9p^2V + (4p^3 + 27q^2) = 0.$$

L'équation aux carrés des différences de

$$(a_0 x + a_1)^3 + 3\varpi(a_0 x + a_1) \pm \sqrt{a_0^2 \varphi - 4\varpi^3} = 0$$

est donc

$$V^3 + 18\varpi V^2 + 81\varpi V + 27 a_0^2 \varphi = 0.$$

Soient $a_0 x_1 + a_1$ et $a_0 x_2 + a_1$ deux racines de la proposée, le carré de leur différence est $a_0^2 (x_1 - x_2)^2$; en remplaçant V par a_0^2 V, on a une nouvelle équation

$$a_0^4 V^3 + 18 a_0^2 \varpi V^2 + 81 \varpi V + 27\varphi = 0,$$

qui a pour racine $(x_1 - x_2)^2$ et qui est par conséquent l'équation aux carrés des différences de

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0.$$

7. Le même procédé de calcul donne une vérification facile des formules de la question 412, t. XVI, p. 404, des *Nouvelles Annales*.

Je prends une équation sous la forme

$$x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} + tx^{m-5} + ux^{m-6} + \ldots = 0.$$

Je désigne par s_i la fonction symétrique simple d'ordre i de cette équation et par S_i la même fonction symétrique pour l'équation aux carrés de la différence de la proposée

$$n = \frac{m(m-1)}{2}, \quad x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + \ldots = 0.$$

Lagrange a donné entre ces fonctions symétriques la relation

$$S_i = ms_{2i} - 2i.s_i s_{2i-1} + \frac{2i(2i-1)}{1.2} s_2 s_{2i-2} \mp \ldots$$
$$\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2i(2i-1)\ldots(i+1)}{1.2\ldots i} s_i^2.$$

Les formules de Newton (*) donnent

$$s_1 = 0,$$
$$s_2 = -2p,$$
$$s_3 = -3q,$$
$$s_4 = 2(p^2 - 2r),$$
$$s_5 = 5(pq - t),$$
$$s_6 = -2p(p^2 - 3r) + 3q^2 - 6u;$$

$$S_1 + B = 0,$$
$$S_2 + BS_1 + 2C = 0,$$
$$S_3 + BS_2 + CS_1 + 3D = 0,$$

et la formule de Lagrange donne

$$S_1 = ms_2 = -2mp,$$
$$S_2 = ms_4 + 3s_2^2 = 2m(p^2 - 2r) + 12p^2,$$
$$S_3 = ms_6 + 15s_2 s_4 - 10s_3^2$$
$$= -2mp(p^2 - 3r) + 3mq^2 - 6mu - 60p(p^2 - 2r) - 90q^2.$$

On en déduit

$$B = 2mp,$$
$$C = p^2(2m^2 - m - 6) + 2mr,$$
$$3D = 2p^3(m-2)(2m^2 + m - 15)$$
$$+ 6pr(2m^2 - m - 20) - 3q^2(m - 30) + 6mu.$$

(*) La justice exige formules d'Albert Girard. Tm.

Maintenant j'identifie la proposée avec

$$(a_0 x + a_1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}\varpi(a_0 x + a_1)^{m-2}$$

$$\pm\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sqrt{a^2\varpi\lambda - a_0^3\mu - 4\varpi^3}(a_0 x + a_1)^{m-3}$$

$$+\frac{m(m-1)m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(a_0^2\lambda - 3\varpi^2)(a_0 x + a_1)^{m-4} + \ldots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\times(a_0^4\chi - 5a_0^2\varpi\lambda - 10a_0^3\mu + 5\varpi^3)(a_0 x + a_1)^{m-6} + \ldots.$$

Je n'écris pas le terme en $(a_0 x + a_1)^{m-5}$; il est inutile.

La substitution de ces coefficients à p, q, etc., donne après réduction

$$B = -a_0^2\sum(x_1 - x_2)^2 = m^2(m-1)\varpi,$$

$$2C = 2a_0^4\sum(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2$$

$$= m^2(m-1)(m-2)\left[m^2\varpi^2 + \frac{m-3}{6}a_0^2\lambda\right],$$

$$6D = -6a_0^6\sum(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2$$

$$= m^2(m-1)(m-2)$$

$$\times\left[\begin{array}{c} m^4(m-3)\varpi^3 + \frac{m^2}{2}(m^2 - 5m + 8)a_0^2\varpi\lambda \\ -\frac{m(7m-15)}{2}a_0^3\mu + (m-3)(m-4)(m-5).a_0^4\chi \end{array}\right],$$

x_1, x_2, x_3, etc., étant les racines de

$$f_m = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)(x, 1)^m = 0.$$

8. Je vais maintenant faire usage des invariants dans la résolution algébrique des équations du troisième et du quatrième degré.

On trouve dans la quinzième leçon du *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret (1re édition, p. 186) deux méthodes pour résoudre l'équation du troisième degré. La première, celle de Hudde, traite l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

et fait dépendre sa résolution des deux suivantes

$$x = y - \frac{p}{3y},$$

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Cette dernière équation étant la résolvante de la proposée, l'expression algébrique de x est

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}},$$

où

$$R = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27},$$

et en n'associant que les valeurs des radicaux cubiques dont le produit est $-\frac{p}{3}$.

J'identifie la proposée avec

$$(a_0 x + a_1)^3 + 3\varpi(a_0 x + a_1) \pm \sqrt{a_0^2 \varphi - 4\varpi^3} = 0,$$

la résolvante devient

$$y^6 \pm \sqrt{a_0^2 \varphi - 4\varpi^3}\, y^3 - \varpi^3 = 0, \quad R = \frac{a_0^2 \varphi}{4},$$

et l'expression algébrique de x devient

$$a_0 x + a_1$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{a_0^2\varphi - 4\varpi^3} + a_0\sqrt{\varphi}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{a_0^2\varphi - 4\varpi^3} - a_0\sqrt{\varphi}}{2}}.$$

La deuxième méthode proposée par Lagrange traite l'équation

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

et la remplace par le système

$$x = \frac{-P + \sqrt[3]{\theta_1} + \sqrt[3]{\theta_2}}{3},$$

$$\theta^2 - (2P_3 + 9PQ - 27R)\,\theta + (P^2 - 3Q)^3 = 0,$$

θ_1 et θ_2 étant les racines de cette résultante en θ.

J'identifie avec

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

la résolvante devient

$$\frac{a_0^6\theta^2}{27^2} \pm \sqrt{a_0^2\varphi - 4\varpi^3}\,\frac{a_0^3\theta}{27} + \varpi^3 = 0,$$

d'où

$$\frac{a_0^3\theta}{27} = \frac{-\sqrt{a_0\varphi - 4\varpi^3} \pm a_0\sqrt{\varphi}}{2},$$

et

$$x = \frac{-a_1 + \sqrt[3]{\dfrac{-\sqrt{a_0\varphi - 4\varpi^3} + a_0\sqrt{\varphi}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{-\sqrt{a_0\varphi - 4\varpi^3} - a_0\sqrt{\varphi}}{2}}}{a_0}$$

valeur identique avec la première trouvée par la formule de Cardan.

L'extension de la formule de Cardan aux équations complètes ne présente qu'un intérêt théorique; l'introduction des imaginaires dans deux au moins des trois valeurs de x rend la formule inapplicable en pratique. Mon seul but était de montrer par un calcul simple que les méthodes de Hudde et de Lagrange sont identiques non-seulement dans leurs résultats, mais même dans les résolvantes qu'elles fournissent.

9. Des calculs analogues s'appliquent à la résolution des équations du quatrième degré. Je ne parlerai que de la méthode de Lagrange qui, partant de l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

arrive à la résolvante

$$\theta^3 - (3p^2 - 8q)\theta^2 + (3p^4 - 16p^2q + 16q^2 + 16pr - 64s)\theta - (p^3 - 4pq + 8r)^2 = 0$$

et donne pour expression des racines de la proposée

$$x = \frac{-p + \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}}{4}.$$

Avec la notation symbolique

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)(x, 1)^4 = 0,$$

et en posant

$$\tau = \frac{a_0^2}{16}\theta,$$

la résolvante devient

$$4\tau^3 + 12\varpi\tau^2 + (12\varpi^2 - a_0^2\lambda)\tau + (4\varpi^3 - a_0^2\varphi) = 0,$$

et l'expression générale de x

$$x = \frac{-a_1 + \sqrt{\tau_1} + \sqrt{\tau_2} + \sqrt{\tau_3}}{a_0}.$$

La résolvante peut s'écrire plus simplement

$$4(\tau + \varpi)^3 - a_0^2\lambda(\tau + \varpi) + a_0^3\mu = 0,$$

et l'on en déduit

$$\tau = -\varpi + \frac{a_0}{2}\left[\sqrt[3]{-\mu + \frac{\sqrt{-D_4}}{27}} + \sqrt[3]{-\mu + \frac{\sqrt{-D_4}}{27}}\right],$$

expression remarquablement simple, grâce à l'emploi des invariants.

10. Si $\mu = o$, la résolvante devient

$$4(\tau + \varpi)^3 - a^2\lambda(\tau + \varpi) = o,$$

et se décompose en les deux suivantes

$$4(\tau + \varpi)^2 - a^2\lambda = o, \quad \tau + \varpi = o.$$

Dans ce cas τ et par suite x ne contient pas de radical cubique, résultat énoncé dans la question 387 des *Nouvelles Annales* (t. XVI, p. 183).

11. Les applications qui précèdent montrent combien la notation symbolique et la considération des invariants simplifient l'étude algébrique des fonctions. La notation habituelle $x^m + px^{m-2} + \ldots$ ne devrait être employée que comme procédé de calcul et devrait toujours disparaître des résultats. L'homogénéité des formules est un contrôle continuel de l'exactitude des opérations et un moyen mnémonique d'en conserver le souvenir. On peut appliquer à toutes les parties des mathématiques ce que M. Lamé dit de la géométrie : « Si par un choix nécessairement arbitraire, on remplace l'ensemble de plusieurs lignes par une seule, on perd toujours en clarté, en précision, en richesse de déduction plus qu'on ne peut gagner à cette simplification apparente. » (*Leçons sur les surfaces isothermes*, p. 16.)

REMARQUES SUR QUELQUES SÉRIES;

PAR M. LE BESGUE.

1. Sans être nouvelles, les remarques suivantes peuvent être utiles; il suffira donc de les exposer brièvement.

Le terme général du développement de la puissance

$$(a+b+c+\ldots)^m$$

est en posant

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=m \quad \text{et} \quad 1.2.3\ldots\alpha=\Pi\alpha;$$

$$\frac{\Pi m}{\Pi\alpha.\Pi\beta.\Pi\gamma\ldots}a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots.$$

On sait que le coefficient $\frac{\Pi m}{\Pi\alpha.\Pi\beta.\Pi\gamma\ldots}$ exprime le nombre des permutations des facteurs d'un produit où il y a α facteurs égaux entre eux, puis β autres aussi égaux entre eux, et ainsi de suite, le nombre total des facteurs étant m.

2. Il suit de là que les développements $(1+1)^m$, $(1-1)^m$ où les termes également distants des extrêmes sont égaux en valeur absolue, conduisent aux relations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{2^{2m+1}}{\Pi(2m+1)}=\frac{2}{\Pi(2m+1)}+\frac{2}{\Pi 1.\Pi 2m}\\&+\frac{2}{\Pi 2.\Pi(2m-1)}+\ldots+\frac{2}{\Pi m.\Pi(m+1)},\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&0=\frac{2}{\Pi(2m+1)}+\frac{2}{\Pi 1.\Pi 2m}\\&+\frac{2}{\Pi 2.\Pi(2m-2)}-\ldots\pm\frac{2}{\Pi m.\Pi m+1},\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2^{2m}}{\Pi 2m} &= \frac{2}{\Pi 2m} + \frac{2}{\Pi 1 . \Pi(2m-1)} + \ldots \\ &+ \frac{2}{\Pi(m-1) . \Pi(m+1)} + \frac{1}{\Pi m . \Pi m}, \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{2}{\Pi(2m)} - \frac{2}{\Pi 1 . \Pi(2m-1)} \\ &+ \frac{2}{\Pi 2 . \Pi(2m-2)} + \ldots \pm \frac{1}{\Pi m . \Pi m}; \end{aligned} \right.$$

relations qui vont servir pour établir quelques formules importantes.

3. Si l'on pose

$$(5)\quad x = 1 - \frac{u^2}{\Pi 2} + \frac{u^4}{\Pi 4} - \ldots, \quad y = \frac{u}{\Pi 1} - \frac{u^3}{\Pi 3} + \frac{u^5}{\Pi 5} - \ldots,$$

on en déduira

$$(6)\qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Les formules (1), (2), (3) et (4) montrent de suite que le coefficient de chaque puissance de u dans x^2+y^2 est égal à zéro.

Les formules (5) sont donc le sinus et le cosinus d'un certain arc de cercle. Or comme

$$dx = -y . du, \quad dy = x . du,$$

il en résulte

$$dx^2 + dy^2 = (x^2 + y^2)\, du^2,$$

ou bien

$$ds = du,$$

d'où $u = s$ en prenant convenablement l'origine des arcs et le sens dans lequel on doit les compter.

L'expression

$$du = \frac{dy}{x} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

donne encore

$$u = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

qu'il faudra prendre entre les limites $y = 0$ et y positif < 1.

4. Si l'on eût posé

$$(7) \quad x_1 = 1 + \frac{u^2}{\Pi 2} + \frac{u^4}{\Pi 4} + \ldots, \quad y_1 = u + \frac{u^3}{\Pi 3} + \frac{u^5}{\Pi 5} + \ldots,$$

on eût trouvé

$$(8) \qquad x_1^2 - y_1^2 = 1.$$

x_1 et y_1 sont ce qu'on nomme *sinus* et *cosinus hyperboliques*, mais ici u n'est pas un arc de la courbe.

On a

$$dx_1 = y_1\, du, \quad dy_1 = x_1\, du;$$

$$du = \frac{dx_1}{y_1}$$

et

$$u = \int \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}}.$$

5. Les sinus et cosinus hyperboliques s'expriment aisément par des exponentielles.

Si l'on considère l'expression

$$F(u) = 1 + \frac{u}{\Pi 1} + \frac{u^2}{\Pi 2} + \frac{u^3}{\Pi 3} + \ldots,$$

en formant le produit $F(u).F(v)$ et groupant les termes de même degré

$$\frac{u^i}{\Pi i} + \frac{v}{\Pi i}\frac{u^{i-1}}{\Pi(i-1)} + \ldots + \frac{v^i}{\Pi i} = \frac{(u+v)^i}{\Pi i},$$

on aura la relation

$$(9)\qquad F(u).F(v)=F(u+v),$$

qui conduit de suite à

$$F(u)^2=F(2u)\ldots,\quad F(u)^m=F(mu);$$

et, par suite,

$$\sqrt[m]{F(u)}=F\left(\frac{u}{m}\right),$$

et encore

$$[F(u)]^{\frac{n}{m}}=F\left(\frac{n}{m}u\right).$$

Il faut bien remarquer que la fonction a^{ku} satisfait à la relation (9). D'après cela, si l'on pose

$$a^k=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots=e,$$

qui conduit à

$$k=\frac{\log e}{\log a},$$

quelle que soit la base du système de logarithme, on aura

$$a^{k\frac{n}{m}}=1+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)}{1}+\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^2}{1.2}+\ldots,$$

le sorte qu'en posant

$$k\frac{n}{m}=u,$$

on trouvera

$$a^u=1+\frac{\left(\frac{\log a}{\log e}u\right)}{1}+\frac{\left(\frac{\log a}{\log e}u\right)^2}{1.2}+\ldots,$$

et pour $a = e$,

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} \cdots$$

Or soit

$$e^u = x_1 + y_1,$$
$$z = x_1 - y_1,$$

il vient

$$z.e^u = x_1^2 - y_1^2 = 1 \quad \text{et} \quad z = e^{-u};$$

de là encore

$$x_1 = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad y_1 = \frac{e^u - e^{-u}}{2};$$

expressions des sinus et cosinus hyperboliques.

Comme

$$e^u = x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1},$$

il en résulte

$$u = l\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 - 1}\right)$$

et

$$du = \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}},$$

comme on l'a déjà vu.

6. L'expression du développement de a^x,

$$y = a^x = 1 + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e}\, x\right)}{1} + \frac{\left(\frac{\log a}{\log e}\, x\right)^2}{1.2} + \ldots,$$

conduit à la dérivée de l'exponentielle; d'où l'on peut tirer, par le théorème des fonctions inverses, la dérivée de la fonction logarithmique. Cette marche, suivie par d'anciens auteurs, qui ont peut-être un peu négligé la rigueur, est plus directe que celle qui consiste à traiter d'abord la fonction logarithmique, puisque dans l'ordre naturel on passe des exponentielles aux logarithmes, et non des logarithmes aux exponentielles (*).

(*) *Voir* t. XIV, p. 151. TM.

GÉOMÉTRIE DU CERCLE ET DE LA SPHÈRE.

Des relations qui existent entre les rayons des huit cercles tangents à trois autres, et entre les rayons des seize sphères tangentes à quatre autres; par J. MENTION. (*Bul. Ac. Saint-Pétersb.*, t. XVII; n° 414, p. 466; nov. 1858.)

Il y a deux relations pour les cercles, et six pour les sphères. Question proposée, non résolue dans Gergonne, t. XIX, p. 182.

1°. Conditions pour que trois cercles aient une tangente commune :

R, R′, R″ rayons des trois cercles,
$d =$ distance des centres des cercles R′, R″,
$d' =$ » R, R″;
$d'' =$ » R, R′;
T = aire du Δ formé par les trois centres.

Condition :

$$\sum d^2 (R - R')(R - R'') = 4T^2.$$

2°. $t^2 =$ puissance du centre radical, dans ce cas

$$16t^2T^2 = \sum R^4 d^2 - \sum R^2 R'^2 (d^2 + d'^2 - d''^2)$$

$$- \sum R^2 d^2 (d'^2 + d''^2 - d^2) + d^2 d'^2 d''^2.$$

3°. Conditions pour que quatre sphères aient un plan

tangent commun :

A, B, C, D quatre centres,
A = aire de la face BCD,
B = » ACD,
C = » ABD,
D = » ABC;
V = volume du tétraèdre ABCD,

R rayon de la sphère A,
R' » B,
R'' » C,
R''' » D.

Condition cherchée :

$$9V^2 = \sum D^2 \left[R'''^2 - 2 \sum R R''' \cos(A, D) \right].$$

(MENTION.)

TRIGONOMÉTRIE.

a étant un nombre entier positif, on a généralement

$$(1) \quad \begin{cases} \sin \dfrac{a\pi}{2} = \dfrac{1}{2}[1-(-1)^a](-1)^{\frac{a-1}{2}}, \\ \cos \dfrac{a\pi}{2} = \dfrac{1}{2}[1+(-1)^a](-1)^{\frac{a}{2}}. \end{cases}$$

M. Carl Spitz, professeur à l'École Polytechnique de Carlsruhe, déduit de là l'universalité des formules connues de sin $(a+b)$ et cos $(a+b)$. (*Archives de Grunert*, t. XXXII, p. 289; 1859.) Il procède ainsi :

α étant plus petit que $\frac{\pi}{2}$ et *a* un entier positif, on connaît les diverses valeurs $\pm \sin\alpha$, $\pm \cos\alpha$ et $\sin\left(\alpha + \frac{a\pi}{2}\right)$;

on pose

$$\sin\left(\alpha + \frac{a\pi}{2}\right) = x \sin\alpha + y \cos\alpha,$$

et prenant pour a les diverses valeurs $4n$, $4n \pm 1$, $4n + 2$, on détermine x et y, et l'on a finalement

$$\sin\left(\alpha + \frac{a\pi}{2}\right) = \sin\alpha \cos\frac{a\pi}{2} + \cos\alpha \sin\frac{a\pi}{2},$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{a\pi}{2}\right) = \cos\alpha \cos\frac{a\pi}{2} - \sin\alpha \sin\frac{a\pi}{2}.$$

De même, en s'appuyant sur les expressions (1), soient $\alpha = \alpha' + \frac{a\pi}{2}$, $\beta = \beta' + \frac{b\pi}{2}$, α' et β' moindres chacun que $\frac{\pi}{4}$, a et b deux nombres entiers positifs. Faisons

$$a + b = c;$$

on a, d'après ce qui précède,

$$\sin\alpha = \sin\alpha' \cos\frac{a\pi}{2} + \cos\alpha' \sin\frac{a\pi}{2},$$

$$\cos\alpha = \cos\alpha' \cos\frac{a\pi}{2} - \sin\alpha' \sin\frac{a\pi}{2},$$

$$\sin\beta = \sin\beta' \cos\frac{b\pi}{2} + \cos\beta' \sin\frac{b\pi}{2},$$

$$\cos\beta = \cos\beta' \cos\frac{b\pi}{2} - \sin\beta' \sin\frac{b\pi}{2};$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\left(\alpha' + \beta' + \frac{c\pi}{2}\right) \\ &= \sin(\alpha' + \beta') \cos\frac{c\pi}{2} + \cos(\alpha' + \beta') \sin\frac{c\pi}{2}; \end{aligned}\right.$$

car $\alpha' + \beta' < \frac{\pi}{2}$; or $\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$, en y substi-

tuant les valeurs de ci-dessus, amène au membre à droite de l'équatian (2); d'où

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Même raisonnement pour $\cos(\alpha+\beta)$.

THÉORÈMES SUR LE TÉTRAÈDRE (*);

D'APRÈS M. DE STAUDT (A ERLANGEN).

1. Soit ABCD un tétraèdre.

$DA.BC=a$	$2s=a+b+c$, $\omega^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$;
$DB.AC=b$	V = volume du tétraèdre;
$DC.AB=c$	r = rayon de la sphère circonscrite.

On a

$$6rV=\omega.$$

2. Mêmes données; soit un cône ayant pour sommet D et pour base le cercle circonscrit au triangle ABC; u le produit de la plus grande arête et de la plus petite arête de ce cône; Δ l'aire du triangle ABC.

On a

$$\Delta u=\omega.$$

3. Mêmes données; le triangle qui a pour côtés $\frac{a}{\sqrt{u}}$, $\frac{b}{\sqrt{u}}$, $\frac{c}{\sqrt{u}}$, a même aire que le triangle ABC.

4. Lorsque deux sphères sont en relation *perspective*, A_1, B_1, C_1, D_1, correspondant respectivement à ABCD, on a

$$a:b:c=a_1:b_1:c_1,$$

a, b, c conservant même signification que dessus.

(*) A démontrer.

DEUX THÉORÈMES DE MAXIMUMS ARITHMOLOGIQUES (*);

D'APRÈS M. OETTINGER, A FRIBOURG.

1. Le nombre entier positif N est décomposé par voie d'addition en r nombres entiers positifs égaux ou inégaux. Posons $N + \nu = rk$; ν est un nombre essentiellement positif et le plus petit possible pour que k soit entier; $(k-1)^{\nu} k^{r-\nu}$ est le maximum des produits des r nombres.

2. Lorsque $k = 3$, cette dernière expression est un *maximum maximorum*.

BIBLIOGRAPHIE DE LA PARTITION DES NOMBRES.

Euler. — *Introd. in. Analys. infinit.*, t. I, § 297.

Euler. — *N. Comm. Acad. Petrop.*, 1750; t. III, p. 15, 125.

Euler. — *N. Comm. Acad. Petrop.*, 1769; t. XIV, p. 168.

Paoli. — *M. Soc. italiana,* 1784; t. II, p. 787.

Petri Pauli Liburnensis. — *Opusculum*, t. II.

Brunacci. — *Matem. subl.*, 1804; t. I, § 108.

Brunacci. — *Comp. del calc. subl.*, 1811; § 114.

Lacroix. — *Traité du calc. diff. et intég.*, 1819; t. III, § 1193.

Legendre. — *Théorie des nombres*, 1830; t. II, p. 128.

Brianchon. — *Journal de l'École Pol.*, 1837; t. XXV, p. 166.

(*) A démontrer.

Catalan. — *Journal de Liouville*, 1838; t. III, p. 111.
Rodrigues (O). — *Journal de Liouville*, 1839; t. IV, p. 236.
Jacobi.— *Journal de Crelle*, 1846; t. XXXII, p, 164.
Stern. — *Journal de Crelle*, 1840; t. XXI, p. 91 177.
Sylvester. — *Ann. Tortol.*, 1857; t. VIII, p. 12.
Sylvester. — *Quarterly Journal*, 1855; p. 141.
Brioschi. — *Ann. Tortol.*, 1857; t. VIII, p. 5.
Cayley. — *Ann. Tortol.*, 1858; t. I, p. 328.
Bellavitis (G.), *Ann. Tortol.*, 1859; t. II, p. 137.

Observation. Cette Notice termine l'article de M. Bellavitis.

QUESTIONS.

490. Étant donné un cône du *second* degré, trouver le *lieu* du point d'où ce cône est vu sous un angle *donné*.

491. A et B sont deux coniques dans un même plan. D'un point quelconque situé sur A on abaisse une perpendiculaire sur la polaire de ce point relativement à B. Quel est le *lieu* du *pied* de cette perpendiculaire? Quand ce *lieu* est-il une conique? un cercle?

492. Inscrivons dans le triangle ABC le triangle cab; c est sur AB, a sur BC, b sur AC; soit O un point fixe situé dans le plan du triangle ABC; menons Cc', Bb', Aa' respectivement parallèles à Oc, Ob, Oa; c' est sur AB, a' sur BC, b' sur AC; on aura

$$\frac{Oc}{Cc'} \pm \frac{Ob}{Bb'} \pm \frac{Oa}{Aa'} = 1.$$

Les doubles signes sont relatifs aux diverses positions de O, a, b, c. (FARAGUET.)

493. Soit P un point d'une conique, C le centre de courbure en P, O le centre de la conique; par C on mène une parallèle à la tangente en P; soit D le point où cette parallèle est rencontrée par le diamètre OP; on a CD égal au *tiers* du rayon de courbure de la *développée* en C.

(ABEL TRANSON.)

494. Soient ABC, abc deux triangles dans le même plan; q est un point variable tel, que les droites qa, qb, qc coupent respectivement les côtés BC, AC, AB en trois points qui sont en ligne droite; le lieu du point q est une ligne du troisième ordre.

495. Une courbe C_n de degré n et une conique C_2 sont données dans le même plan; on prend la polaire d'un point quelconque situé sur C_n par rapport à la conique C_2; soient P et Q les points d'intersection de cette polaire avec la conique, le lieu du point d'intersection de deux normales menées en P et Q à la conique ne dépasse pas $3n$.

(DES BOVES.)

496. Par un point pris arbitrairement dans l'espace, on peut, en général, mener $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ droites, dont chacune rencontre en deux points la ligne à double courbure résultant de l'intersection de deux surfaces algébriques d'ordre m et p; toutes ces droites sont sur un cône d'ordre $(m-1)(p-1)$.

Il suit de là que, la perspective de l'intersection de deux surfaces d'ordre m et p a $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ points, doubles situés sur une courbe d'ordre $(m-1)(p-1)$.

(MOUTARD.)

497. Tout plan, doublement tangent à la surface en-

gendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan, la coupe suivant deux coniques dont les projections, sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, ont un foyer commun au pied de l'axe.

(MOUTARD.)

SUR DIVERSES GÉOMÉTRIES.

Il existe aujourd'hui *huit* géométries, distinguées les unes des autres par des différences logiques.

Nous les désignerons par des noms de géomètres français qui ont publié des ouvrages spéciaux.

1°. La géométrie ancienne, *fondamentale*, celle des Lycées (Legendre);

2°. La géométrie projective (Poncelet);

3°. La géométrie *dualiste, polarité réciproque* (Poncelet);

4°. La géométrie *segmentaire* (Chasles);

5°. La géométrie *infinitésimale* (Bertrand, Ossian Bonnet);

6°. La géométrie *cinématique* (Mannheim);

7°. La géométrie *algorithmique, déterminants, invariants* (Painvin).

8°. La géométrie *épiphanoïque, famille de surfaces homofocales, isothermes, équistatiques* (Lamé).

Il y a encore deux autres géométries, dont les principes ne sont pas encore connus.

a). La géométrie de *situation*, indiquée par Leibniz; exemple : Jeu du solitaire, cavalier aux échecs (Euler); passage des ponts sur la Pregel (Euler).

b). La géométrie de *disposition*, objet de six leçons publiques de M. Sylvester, dont les sommaires sont im-

primés, et que ce célèbre mathématicien promet d'exposer prochainement dans un Mémoire spécial.

Un précieux ouvrage serait un traité élémentaire qui contînt, outre la géométrie fondamentale, les *principes* des autres géométries avec leurs *principales* applications aux lignes et aux surfaces en *général*. Les coniques ne seront dûment connues que quand on cessera de les étudier isolément, et conservant partout la rigueur apodictique âme de la géométrie, on devra bannir le *puritanisme* et suivre le conseil que donne Bezout dans la préface de sa Géométrie : « Il faut, dit-il, élaguer ces attentions scrupuleuses qui vont jusqu'à démontrer des axiomes, et qui, à force de supposer le lecteur inepte, conduisent enfin à le rendre tel. »

Chacune de ces géométries réclame un Euclide.

COVARIANTS

(voir p. 304).

On est prié de relire ce qui concerne les invariants (p. 253).

17. Soit

$$U = (a_0, a_1, a_2, a_3)(x, y)^3.$$

Posons

$$x = \alpha_1 \xi + \beta_1 \zeta, \quad y = \alpha_2 \xi + \beta_2 \zeta;$$

on obtient

$$U_1 = (A_0, A_1, A_2, A_3)(\xi, \zeta)^3;$$

$$A_0 = (a_0, A_1, A_2, A_3)(\alpha_1, \alpha_2)^3, \quad A_3 = (A_0, A_1, A_2, A_3)(\beta_1, \beta_2)^3;$$

$$3A_1 = \beta_1 \frac{dA_0}{d\alpha_1} + \beta_2 \frac{dA_0}{d\alpha_2},$$

$$3A_2 = \alpha_1 \frac{dA_3}{d\beta_1} + \alpha_2 \frac{dA_3}{d\beta_2}.$$

Posons

$$\varphi = \left[a_0 a_2 - a_1^2,\ \frac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2),\ (a_1 a_3 - a_2^2)\right](x, y)^2,$$

$$\varphi_1 = \left[A_0 A_2 - A_1^2,\ \frac{1}{2}(A_0 A_3 - A_1 A_2),\ (A_1 A_3 - A_2^2)\right](\xi, \zeta)^3;$$

les binômes doivent être considérés comme des monômes. Remplaçant dans φ, x et y par leurs valeurs en ξ et ζ, et dans φ_1 les A par leurs valeurs en a, on trouve

$$\varphi_1 = (\alpha_1, \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^3 \varphi;$$

φ est dit un *covariant* de U.

Dans les invariants, on n'a que les coefficients a de U, tandis que dans les covariants, on a aussi les variables x, y.

18. *Généralisation.* Soit U une fonction à deux variables; tranformons-la linéairement comme dans le paragraphe précédent; soient a, b, c, d, ... les coefficients de U, et A, B, C, D, ... les coefficients de la fonction transformée U_1; ces coefficients sont des fonctions de a, b, c, d, ... et de α_1, β_1, α_2, β_2.

Faisons sur U une opération *dérivative;* par exemple,

$$\frac{d^2U}{dx^2}\frac{d^2U}{dy^2} - \left(\frac{d^2U}{dx\,dy}\right)^2 = \varphi,$$

et d'une manière analogue,

$$\frac{d^2U_1}{d\zeta^2}\frac{d^2U_1}{d\xi^2} - \left(\frac{d^2U_1}{d\xi\,d\zeta}\right)^2 = \varphi_1;$$

φ est composé de a, b, c, d,... et de x, y;

φ_1 est composé de A, B, C, D,... et de ξ, ζ.

Si remplaçant dans φ, x et y par ses valeurs en ξ, ζ, et dans φ_1, A, B, C, D... par ses valeurs en a, b, c, d...; α_1, α_2, β_1, β_2, on obtient

$$\varphi_1 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^p \varphi,$$

où p est un entier positif alors φ est un covariant de U.

Il y a encore d'autres opérations dérivatives qui donnent des covariants. La démonstration exige qu'on sache ce que deviennent par transformation les quotients différentiels de U, c'est l'objet de l'article suivant.

Transformation linéaire des quotients différentiels (*).

19. Soit le *quantic* binaire U et le transformé U_1, au moyen de

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y;$$

d'où l'on déduit

$$(\alpha_1 \beta_2)\, X = \beta_2 x - \beta_1 y,$$
$$(\alpha_1 \beta_2)\, Y = -\alpha_2 x + \alpha_1 y;$$
$$(\alpha_1 \beta_2) \frac{dX}{dx} = \beta_2, \quad (\alpha_1 \beta_2) \frac{dX}{dy} = -\beta_1;$$
$$(\alpha_1 \beta_2) \frac{dY}{dx} = -\alpha_2, \quad (\alpha_1 \beta_2) \frac{dY}{dy} = \alpha_1;$$

donc

$$\frac{dU}{dx} = \frac{dU_1}{dX}\frac{dX}{dx} + \frac{dU_1}{dY}\frac{dY}{dx},$$
$$\frac{dU}{dy} = \frac{dU_1}{dX}\frac{dX}{dy} + \frac{dU_1}{dY}\frac{dY}{dy};$$
$$(\alpha_1 \beta_2) \frac{dU}{dy} = \alpha_1 \frac{dU_1}{-dY} + \beta_1 \left(\frac{-dU}{dX}\right),$$
$$-(\alpha_1 \beta_2) \frac{dU}{dx} = \alpha_2 \frac{dU_1}{dY} + \beta_2 \left(\frac{-dU_1}{dX}\right).$$

Ainsi, à l'exception du diviseur constant $\frac{1}{(\alpha_1 \beta_2)}$, $\frac{dU}{dy}$

(*) *Quotient différentiel*, usité chez les Allemands et adopté par M. Duhamel, est préférable à *coefficient différentiel*, qui est seulement relatif au théorème de Taylor.

et $-\frac{dU}{dx}$ sont transformés respectivement par le même procédé que x et y, on remplace x par $\frac{dU}{dy}$ et y par $-\frac{dU}{dx}$.

Si l'on a donc

$$U = f(x, y), \quad U_1 = f(X, Y),$$

on a aussi

$$(\alpha_1 \beta_2)^n f\left(\frac{dU}{dy}, -\frac{dU}{dx}\right) = f\left(\frac{dU_1}{dY}, \frac{dU_1}{dx}\right);$$

le second membre est donc un covariant de U (18) ; n indique le degré de f.

Il faut faire attention que $x^p y^q$ ne donne pas

$$(-1)^p \left(\frac{dU}{dx}\right)^p \left(\frac{dU}{dy}\right)^q,$$

mais

$$(-1)^p \frac{d^n U}{dx^p\, dy^q},$$

où n est le degré de U et $p + q = n$.

20. *Exemples.* 1°.

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad U_1 = AX^2 + 2BXY + 2CY^2;$$

d'où

$$(a) \quad (\alpha_1 \beta_2)^2 \left(a\frac{d^2}{dy^2} - 2b\frac{d^2}{dx\,dy} + c\frac{d^2}{dx^2}\right) = \frac{A\,d^2}{a\,Y^2} - \frac{2B\,d^2}{dY\,dX} + C\frac{d^2}{dX^2},$$

U et U_1 sont sous-entendus. Exécutant, on trouve

$$(\alpha_1 \beta)^2 (ac - b^2) = AC - B^2,$$

où $ac - b^2$ est un invariant, parce que les variables ont disparu. Mais si n est supérieure à 2, la formule opératoire donne un covariant.

Ainsi, faisant $n = 3$ et appliquant la formule opératoire

$$\left(a\frac{d^2}{dy^2} - 2b\frac{d^2}{dx\,dy} + c\frac{d^2}{dy^2}\right)\cdot\mathrm{U}$$

(U n'est pas un facteur, mais à écrire après les d^2), et posons

$$\mathrm{U} = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3,$$

on trouve pour covariant, après avoir divisé par 6,

$$2(ac - b^2)x + (ad - bc)y;$$

on a encore

$$2(bd - c^2)y + (ad - bc)x.$$

Cette formule opératoire est maintenant connue sous le nom de *Hèssien*, d'après le célèbre disciple de Jacobi, Otto Hesse. Mais si l'on applique à cette fonction U la formule opératoire

$$a\frac{d^3}{dy^3} - 3b\frac{d^3}{dy^2\,dx} + 3c\frac{d^3}{dy\,dx^2} - d\frac{d^3}{dx^3},$$

les variables disparaissent, et l'invariant s'anéantit identiquement, de sorte qu'il n'y a pas d'invariant, et la même chose a lieu pour toute fonction de degré impair, lorsqu'on y applique une formule opératoire déduite de cette fonction elle-même. Nous laissons au lecteur le soin d'en chercher la démonstration. Cela n'a pas lieu pour les fonctions de degré pair, qui donnent toujours un invariant.

2°.

$$\mathrm{U} = (a, b, c, d, e)(x, y)^4,$$

on en déduit la formule opératoire

$$\left(a\frac{d^4}{dy^4} - 4b\frac{d^4}{dy^3\,dx} + 6c\frac{d^4}{dy^2\,dx^2} - 4d\frac{d^4}{dy\,dx^3} + e\frac{d^4}{dx^4}\right);$$

appliquant cette formule à U, on trouve l'invariant

$$ae - 4bd + 3c^2;$$

donc

$$\frac{d^4}{dx^4}\frac{d^4}{dy^4} - 4\frac{d^4}{dx^3\,dy}\frac{d^4}{dx\,dy^3} + 3\left(\frac{d^4}{dx^2\,dy^2}\right),$$

appliqué à U, donne l'invariant

$$ae - 4bd + 3c^2;$$

et en appliquant cette même formule opératoire à un degré supérieur, on trouve un covariant.

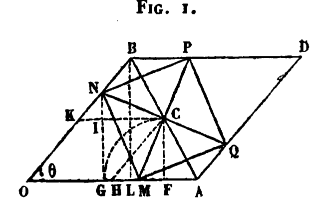
SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 417

(voir t. XVII, p. 31);

PAR M. J. MURENT, DE CLERMONT.
Licencié ès Sciences.

A quelles conditions doivent satisfaire les côtés et les angles d'un parallélogramme pour qu'il soit possible d'inscrire un carré dans ce parallélogramme?

FIG. 1.



I. Soit un carré MNPQ inscrit dans un parallélogramme OADB. Les triangles MAQ et NBP sont égaux, car le côté MQ = NP et les angles sont égaux chacun à chacun, comme ayant les côtés parallèles; donc les lignes MA et BP sont égales et parallèles; par suite, les

lignes MP, AB se coupent en leurs milieux, et il en est de même des lignes NQ et AB.

Ainsi, les diagonales du carré et celles du parallélogramme se coupent en un même point C. On sait aussi que les diagonales du carré sont égales et perpendiculaires entre elles.

Cela posé, menons CK et CH parallèles à OA et OB, puis abaissons sur OA les perpendiculaires CF, BL et NG; cette dernière rencontrant CK au point I. Les triangles rectangles CMF, CNI sont égaux, car les hypoténuses CM et CN sont égales comme demi-diagonales d'un carré, et les angles MCF, NCI, ayant même complément ICM, sont égaux. On a donc

$$CF = CI = FG,$$

et la figure CIGF est un carré. On trouvera la même propriété en abaissant des points C, A, M, des perpendiculaires sur OB.

De là résulte cette construction simple du carré inscrit dans un parallélogramme donné OADB : Par le point de rencontre C des diagonales du parallélogramme, abaissez la perpendiculaire CF sur un des côtés OA; portez la longueur CF en FG sur ce côté, et par le point G élevez sur OA une perpendiculaire qui rencontre l'autre côté OB en un point N. Menant ensuite par ce point N la ligne NCQ, et par le point C la perpendiculaire MCP; joignant enfin deux à deux les points M, N, P, Q où ces deux lignes rencontrent les côtés du parallélogramme; la figure MNPQ ainsi formée sera un carré inscrit.

En effet, si l'on mène à OA la parallèle CI et la perperpendiculaire CF, les triangles rectangles CNI, CMF sont égaux, car les côtés CI, CF sont égaux par construction, et les angles NCI, MCF ayant même complément,

sont égaux. Donc $CN = CM$, et l'on prouvera facilement que la figure MNPQ est un carré.

II. Désignons par θ l'angle AOB (*fig.* 1), que nous supposerons toujours un des angles aigus du parallélogramme; posons

$$OA = 2a \quad \text{et} \quad OB = 2b;$$

d'où résulte

$$CK = OH = HA = a, \quad CH = b,$$

et abaissons BL perpendiculaire sur OA. Pour qu'il soit possible d'inscrire un carré dans le parallélogramme OADB, il faut et il suffit que les points M et N déterminés par la construction précédente tombent sur les côtés OA et OB, et non pas sur leurs prolongements.

Or, d'après cette construction, pour que le point N se trouve entre O et B, il faut qu'en portant FC en FG, le point G tombe entre O et L : ce qui exige que l'on ait à la fois

$$CF > FL \quad \text{et} \quad CF < FO.$$

Mais comme on a

$$CF = CH \sin\theta = b \sin\theta, \quad FL = FA = HA - HF = a - b\cos\theta,$$
$$FO = OH + HF = a + \cos\theta,$$

ces inégalités deviennent

$$b \sin\theta > a - b\cos\theta \quad \text{et} \quad b\sin\theta < a + b\cos\theta,$$

ou enfin

$$(1) \qquad a < b(\sin\theta + \cos\theta),$$

$$(2) \qquad a > b(\sin\theta - \cos\theta).$$

Comme le sommet M pourrait être déterminé par une construction identique à celle qui a donné le point N, les

conditions pour que le point M se trouve entre O et A, seront

$$b < a(\sin\theta + \cos\theta), \quad b > a(\sin\theta - \cos\theta),$$

et pourront s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad a > \frac{b}{\sin\theta + \cos\theta},$$

$$(4) \qquad a < \frac{b}{\sin\theta - \cos\theta}.$$

Je dis maintenant que les quatre conditions (1), (2), (3), (4) se réduisent à deux. En effet,

1°. Si l'on a

$$\theta < 45^\circ, \quad \text{d'où} \quad \cos\theta > \sin\theta,$$

les inégalités (2) et (4), mises sous la forme

$$a + b(\cos\theta - \sin\theta) > 0, \quad b + a(\cos\theta - \sin\theta) > 0,$$

sont toujours satisfaites, et il ne reste que les conditions (1) et (3).

2°. Si l'on a

$$\theta > 45^\circ, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta > \cos\theta,$$

la relation évidente

$$\sin^2\theta - \cos^2\theta < 1$$

donne, en divisant par $\sin\theta + \cos\theta$,

$$\sin\theta - \cos\theta < \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta},$$

et, par suite, l'inégalité (3) entraîne l'inégalité (2). De même la relation

$$\sin\theta + \cos\theta < \frac{1}{\sin\theta - \cos\theta}$$

montre que l'inégalité (1) entraîne l'inégalité (4).

Donc enfin toutes les conditions demandées sont renfermées dans les deux relations

$$(1)\qquad a \leqq b\,(\sin\theta + \cos\theta),$$

$$(3)\qquad a \geqq b\,\frac{b}{\sin\theta + \cos\theta}.$$

Ces deux dernières inégalités sont d'ailleurs compatibles, car l'angle θ étant aigu, on a

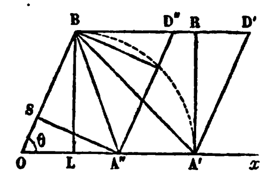
$$\sin\theta > 0, \quad \cos\theta > 0, \quad \sin\theta + \cos\theta > 1,$$

et, par suite,

$$b\,(\sin\theta + \cos\theta) > \frac{b}{\sin\theta + \cos\theta}.$$

Nous allons maintenant interpréter ces résultats.

Fig. 2.



III. Supposons d'abord que l'angle BOx et l'un des côtés $OB = 2b$ du parallélogramme soient donnés (*fig.* 2). Les relations (1) et (3) indiqueront les limites entre lesquelles devra être compris l'autre côté $2a$, pour qu'il existe un carré inscrit.

Afin de construire ces limites, abaissons BL perpendiculaire sur Ox et portons BL en LA'; OA' sera la longueur maximum du côté $2a$, car on aura

$$OA' = OL + LA' = OL + BL = 2b\,(\cos\theta + \sin\theta).$$

Menant ensuite par le point B la droite BA'', de ma-

nière que l'angle $OBA'' = 45°$, la longueur OA'' sera la limite inférieure du côté $2a$; car en abaissant $A''S$ perpendiculaire sur OB, on aura

$$SB = SA'',$$

et, par suite,

$$2b = OS + SB = OS + SA'' = OA'' (\cos\theta + \sin\theta),$$

d'où

$$OA'' = \frac{2b}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

On obtient ainsi deux parallélogrammes-limites $BOA'D'$, $BOA''D''$. La construction d'un sommet du carré inscrit montre que, dans chacun de ces parallélogrammes-limites, le carré inscrit est le carré ayant pour diagonale la plus petite diagonale du parallélogramme.

En prenant pour le sommet A un point quelconque situé entre A'' et A', on déterminera une infinité de parallélogrammes dans lesquels on pourra inscrire un carré.

Dans le cas particulier où $\theta = 90°$, les conditions (1) et (3) donnent $a = b$, c'est-à-dire que le parallélogramme doit être un carré. La construction d'un sommet du carré inscrit montre qu'on peut prendre pour ce sommet un point quelconque du côté du carré donné, et l'on trouve ainsi cette propriété connue : Que dans un carré donné, on peut inscrire une infinité de carrés.

Si l'on a $\theta = 45°$, les conditions (1) et (3) se réduisent à

$$a < b\sqrt{2}, \quad a \geqq \frac{1}{2} b\sqrt{2}.$$

Les parallélogrammes-limites sont doubles l'un de l'autre, et chacun d'eux est double du carré inscrit.

IV. Supposons donnés les deux côtés $2a$ et $2b$. Les re-

lations (1) et (3), écrites sous la forme

$$\sin\theta + \cos\theta \geqq \frac{a}{b}, \quad \sin\theta + \cos\theta \geqq \frac{b}{a},$$

se réduisent à une seule

$$(5) \qquad \sin\theta + \cos\theta \geqq \frac{a}{b},$$

en supposant $a > b$. Mais comme on sait que le maximum de $\sin\theta + \cos\theta$ est $\sqrt{2}$, on a aussi

$$(6) \qquad \sin\theta + \cos\theta \leqq \sqrt{2}.$$

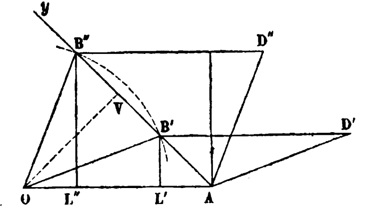
Les relations (5) et (6) donnent les limites entre lesquelles doit être compris l'angle θ pour que l'inscription du carré soit possible; et ces relations ne seront compatibles que si l'on a

$$\frac{a}{b} \leqq \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad a \leqq b\sqrt{2}.$$

Ainsi, la construction du carré inscrit exige d'abord que les côtés donnés satisfassent aux relations

$$b \leqq a \leqq b\sqrt{2}.$$

Fig. 3.



En supposant ces premières conditions remplies, construisons les limites de θ. Pour cela, soit $OA = 2a$ (*fig.* 3),

l'égalité

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \quad \text{donne} \quad \theta = 45^\circ = \text{AOV};$$

c'est une des limites de θ. Menons ensuite par le point A la ligne indéfinie Ay telle, que l'angle $OAy = 45^\circ$, et du point O comme centre, avec $2b$ pour rayon, décrivons un arc de cercle. Puisque l'on a

$$a < b\sqrt{2}, \quad \text{d'où} \quad b > \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad 2b > \text{OV},$$

cet arc coupera nécessairement la ligne Ay en deux points B′, B″, et les angles

$$\text{AOB}' = \theta', \quad \text{AOB}'' = \theta'',$$

qui comprennent entre eux la première limite AOV, seront les valeurs de θ satisfaisant à l'équation

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{a}{b}.$$

En effet, en abaissant B′L′ perpendiculaire sur OA, on a

$$\text{B}'\text{L}' = \text{L}'\text{A},$$

et, par suite,

$$2a = \text{OA} = \text{OL}' + \text{L}'\text{A} = \text{OL}' + \text{BL}' = 2b\,(\cos\theta' + \sin\theta'),$$

d'où

$$\cos\theta' + \sin\theta' = \frac{a}{b}.$$

On verra de même que

$$\cos\theta'' + \sin\theta'' = \frac{a}{b}.$$

Il résulte encore de la relation $b < a$, que les deux angles θ', θ'' seront aigus.

Ainsi, les deux côtés $2a$ et $2b$ étant donnés et satisfaisant aux conditions

$$b \leqq a \leqq b\sqrt{2},$$

on pourra donner à l'angle θ formé par ces côtés toutes les valeurs comprises entre les limites AOB′, AOB″, auxquelles correspondent les parallélogrammes B′OAD′, B″OAD″. En prenant pour le sommet B un point quelconque de l'arc B′B″, compris entre B′ et B″, on déterminera toujours un parallélogramme dans lequel il sera possible d'inscrire un carré.

Dans le cas où $a = b$, les limites de θ sont données par les relations

$$\sin\theta + \cos\theta \geqq 1 \quad \text{et} \quad \sin\theta + \cos\theta \leqq \sqrt{2};$$

et comme ces relations ont lieu pour toute valeur de θ comprise entre 0 et 90 degrés, on en conclut qu'il est toujours possible d'inscrire un carré dans un losange, quels que soient les angles de ce losange.

Si l'on a

$$a = b\sqrt{2},$$

les conditions (5) et (6) deviennent

$$\sin\theta + \cos\theta \geqq \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta + \cos\theta \leqq \sqrt{2},$$

ce qui exige que l'on ait

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}, \quad \text{d'où} \quad \theta = 45^\circ.$$

Il n'y a, dans ce cas, qu'un seul parallélogramme dans lequel on puisse inscrire un carré.

Ces dernières propriétés résultent aussi de la construction indiquée sur la *fig.* 3, quand on y suppose successivement

$$2b = OA \quad \text{et} \quad 2b = OV.$$

REMARQUES SUR QUELQUES SÉRIES (suite)

(voir page 433);

PAR M. LE BESGUE.

7. Si dans le développement de e^x on change x en $x\sqrt{-1}$, on trouve, au moyen des formules (5) qui reviennent à

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

l'équation

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}.\sin x;$$

de même en changeant x en $-x\sqrt{-1}$, on trouve

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}.\sin x,$$

et par suite

$$\cos x = \frac{1}{2}\left\{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right\},$$

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right\}.$$

Ces expressions, où les imaginaires se détruisent, conduisent très-brièvement à des résultats qui demanderaient de longs calculs, si l'on voulait éviter l'emploi des imaginaires, symboles d'une grande utilité, qui voilent à la vérité les opérations pour n'en montrer que les résultats.

8. Les formules (8) de l'article 4 peuvent se mettre

sous la forme

$$Cx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$Sx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$

de là

$$C(x \pm y) = Cx.Cy \pm Sx.Sy,$$
$$S(x \pm y) = Sx.Cy \pm Cx.Sy,$$

et une foule d'autres.

L'expression Cx est un *cosinus hyperbolique*, Sx est un *sinus hyperbolique*. On voit que ce sont les coordonnées d'un certain point de l'hyperbole équilatère dont l'équation est

$$x^2 - y^2 = 1.$$

On a formé des Tables pour ces sinus et cosinus et pour leurs logarithmes. Elles résolvent des problèmes analogues à ceux dont la solution se tire des Tables trigonométriques ordinaires. Un exemple très-simple est la résolution de l'équation du troisième degré pour le cas d'une seule racine réelle. Chacun le développera facilement.

N. B. A la page 433, ligne 3 en remontant, il y a une faute de signe, il faut lire $-\frac{2}{\Pi 1 . \Pi 2m}$.

A la page 435, ligne 10, *au lieu de* un arc de la courbe, *il faut lire* l'arc de la courbe compris entre le sommet et le point dont les coordonnées sont x_1 et y_1.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVIII.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie; Arithmétique.

Analyse algorithmique.

Calcul infinitésimal; Dérivées; Séries.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire et algorithmique.

Géométrie descriptive.

Trigonométrie plane et sphérique; Analyse et lignes sphériques.

Coniques planes.

Géométrie dans l'espace : Lignes en général et Surfaces.

Pages.

Lignes et Surfaces du troisième ordre.

Mécanique.

Pages.

Questions proposées.

Questions résolues.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Collaborateurs sont précédés d'un astérisque.)

ERRATA.

TOME XIV.

Page 8, ligne 18, *au lieu de* 671, *lisez* 67.

TOME XVII.

Page 369, ligne 6 en remontant, *au lieu de* $6n$, *lisez* $4n+1$.

TOME XVIII.

Page 1, ligne 15, *au lieu de* indéterminées, *lisez* déterminées.

71, ligne 3, *au lieu de* $\frac{\pi^2}{6}$, *lisez* $\frac{\pi^2}{12}$.

71, ligne 5, *au lieu de* $\frac{\pi^2}{6}$, *lisez* $\frac{\pi^2}{12}$.

77, ligne 5 en remontant, *au lieu de* E, *lisez* F.

150, ligne 4 en remontant, *au lieu de* L, *lisez* h.

151, ligne 9, *au lieu de* $\frac{N}{2}$, *lisez* $\frac{N}{n}$.

151, dernière ligne, *au lieu de* $\log z$, *lisez* $\log 2$.

188, ligne 7, *au lieu de* la droite, *lisez* les droites.

357, ligne 13 en remontant, *au lieu de* sphères, *lisez* cercles.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les dix-huit premiers volumes.

Nos.	Pages.
TOME II.	
61	48
TOME IV.	
93	259
TOME V.	
120	202
TOME VII.	
192	368
193	368
TOME VIII.	
199	44
TOME X.	
240	357
245	358
TOME XI.	
251 (échecs) (Faure.)	115
252 (domino) (Rédact.)	115
266	401
TOME XII.	
270	99
280	327
TOME XIV.	
307	262
313	305
TOME XV.	
316	52
317	52
324	229
325	229
331	243
333	243
342	353

Nos.	Pages.
TOME XV (suite).	
343	353
347	387
349	407
TOME XVI.	
356	57
357	57
371	127
375	179
379	180
383	182
385	183
398	390
399	391
400	391
403	401
404	401
405	401
407	402
410	403
411	404
TOME XVIII.	
464	117
465	117
473	172
474	172
475	172
478	172
479	172
480	172
482 à 497	172 et 357

Observation. Sur 497 questions, il en reste 65 à résoudre. Les autres sont résolues.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PROBLÈME DES JEUNES FILLES, DE L'AVEUGLE, ETC.

Chez les écrivains du moyen âge certains problèmes d'analyse indéterminée du premier degré sont cités sous les noms de *problema virginum*, *cæci* (*). Je crois que ces dénominations peuvent provenir des 45 *Epigrammata arithmeticorum* qu'on rencontre dans l'Anthologie grecque. Ces petits poëmes roulent tous sur certains nombres entiers à deviner d'après certains caractères de divisibilité et de résidus qui, dans l'algèbre, mènent à des équations indéterminées du premier degré. Dans l'épigramme 3ᵉ, Vénus se plaint à son fils de ce que les muses Clio, Euterpe, etc., lui ont enlevé un certain nombre de pommes, nombre qu'elle désigne énigmatiquement. Dans les épigrammes 4ᵉ, 12ᵉ, 13ᵉ, 14ᵉ, 15ᵉ, ce sont encore des jeunes filles qui se partagent des pommes d'une manière analogue. Dans l'épigramme 41ᵉ, Hésiode demande à Homère le *nombre* des navires grecs arrivés

(*) Et aussi *potatorum*, des buveurs Le mélange des liquides fait partie de ce genre de problèmes.

devant Troie, et Homère désigne ce nombre par des propriétés arithmétiques renfermées aussi dans une équation du premier degré à plusieurs inconnues; or, d'après la tradition, Homère était *aveugle*. On trouve les 44 *Epigrammata arithmeticorum* dans le Diophante de Bachet, et aussi dans Heilbronner, *Historia matheseos universæ*, p. 845, avec une traduction en vers latins, et avec les solutions algébriques.

Dans le *Philosophical magazine* (novembre 1858) le célèbre analyste J.-J. Sylvester (*) a résolu *complétement* le *Problema of the Virgins*, et a trouvé cette théorie générale de la *partition des nombres*.

Étant donné un nombre quelconque d'équations du premier degré moindre que le nombre des inconnues, trouver le *nombre* de solutions possibles en *nombres entiers*, lorsque ce nombre est déterminé. Solution qui n'avait jamais été obtenue que pour une équation unique à plusieurs inconnues. M. Lebesgue donnera incessamment dans les *Nouvelles Annales* une idée de cette importante découverte.

THÉORÈME DE WARING SUR LES NOMBRES PREMIERS.

On lit dans la 3e édition (1782) des *Meditationes analyticæ*, au haut de la p. 379 :

Omnis par numerus constat à duobus primis numeris et omnis impar numerus vel est primus numerus, vel constat è tribus primis numeris.

Il est évident que si un nombre pair est la somme de

(*) Maintenant professeur à l'académie militaire de Woolwich.

deux nombres premiers, tout nombre impair, premier ou non, est la somme de trois nombres premiers.

Ainsi ce théorème, d'un énoncé si simple et dont la démonstration est bien plus difficile que celle du théorème de Fermat, appartient à Waring et non à Goldbach; je l'ai dit par erreur (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 111) d'après la *Correspondance mathématique et physique* (Fuss).

BIBLIOGRAPHIE.

THE MATHEMATICAL MONTHLY.
(*Journal mensuel mathématique.*)

Vers 1824, M. Adrain, professeur de mathématiques à New-York, publiait un journal de mathématiques (*Mathematical Diary*) qui n'a pas eu longue durée.

Aujourd'hui M. Runkele (John), auteur de nouvelles Tables pour déterminer les coefficients dans la fonction des perturbations planétaires (Cambridge, 1854), essaye une même publication. Auparavant, il a voulu consulter l'opinion publique et a obtenu 234 approbations qui promettent de soutenir le journal. La liste par ordre alphabétique est au commencement du mois d'octobre, premier numéro qui vient de paraître. Soixante-deux professeurs s'offrent comme permanents collaborateurs. Nous y remarquons M. Gould, célèbre directeur de l'observatoire Dudley, à Albany, plusieurs membres du bureau des longitudes de Malden, en Massachusets (*Nautical alm. office*). Le but du journal est (*to embrace students in one extreme, and professed mathematicians in the other; which extremes necessarily include all intermediate grades of teachers and laborers in this vast field*) de s'adresser par un bout aux étudiants et par l'autre aux ma-

thématiciens de profession; ces deux bouts renferment nécessairement tous les degrés intermédiaires parmi ceux qui enseignent et cultivent ce champ si vaste. Un journal uniquement rempli de questions et de solutions ne remplirait pas ce double but. Il faut éviter l'*élévation* académique qui éloignerait les élèves, et aussi les *bas-fonds* du rudiment qui éloignent les gens instruits et sèment la graine toxique de l'*ennui,* mortelle à toute publication soit littéraire, soit scientifique; la tendance doit toujours être plutôt vers le zénith que vers le nadir. Là est la dignité humaine.

Os homini sublime dedit : cœlumque tueri
Jussit, et erectos ad sidera tollere vultus.

(*Metam.*, lib. I.)

Chaque numéro contiendra *cinq problèmes* intitulés : *Price problems for students,* problèmes à prix pour les étudiants. Celui qui aura résolu le mieux et le plus de problèmes lors du troisième numéro subséquent au numéro où ils ont été proposés, recevra 10 *dollars* (cinquante francs), et le second en mérite, un exemplaire relié du premier volume du journal.

Voici les cinq *price problems* du mois d'octobre :

I. Déduire θ de chacune des équations

$$\tan\theta \tan 2\theta + \cot\theta = 2,$$
$$2\sin^2 3\theta + \sin^2 6\theta = 2,$$
$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = \cos\theta.$$

II. L'aire totale d'un cône droit étant triple de l'aire de la base, trouver l'angle au sommet.

III. La distance du centre d'une ellipse à la corde qui réunit les extrémités de deux demi-diamètres, formant un angle droit, est constante. Quelle partie de l'aire de l'el-

lipse est l'aire du cercle qui a pour rayon cette distance constante.

IV. Deux cercles de rayon R et r se touchent extérieurement, θ est l'angle formé par les deux tangentes communes; prouver que l'on a

$$\sin\theta = \frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}.$$

V. Les quatre centres des cercles qui touchent trois côtés d'un triangle étant réunis deux à deux, donnent six longueurs. Démontrer que les six milieux de ces longueurs sont sur la circonférence circonscrite au triangle.

Les solutions doivent être adressées avant le 10 décembre pour que les prix puissent être décernés en janvier 1859. Il est probable qu'on n'a en vue que des étudiants *américains,* quoique cela ne soit pas dit. Aucun étudiant ne peut obtenir *deux prix* la même année, mais obtenir une décision des juges.

En outre, cinq prix de 50, 40, 30, 20, 10 dollars seront décernés à des *mémoires* sur des sujets *ad libitum,* et par ordre de mérite.

On donne les noms des juges, mesure que nous avons demandée il y a plusieurs années pour les questions du grand concours, et même les noms de ceux qui proposent les questions. La responsabilité personnelle est une garantie; elles vont ensemble et disparaissent ensemble.

Le mois d'octobre, le seul que nous ayons reçu, contient : Une Note sur les fractions décimales, sur le plus grand commun diviseur, sur l'équation des payements, sur les formules de Neper, sur les dérivées; des propositions segmentaires sur la distribution des points sur une droite; formules sur un volume prismoïde, arches en ovale et à trois centres; relation entre le minimum et

l'état d'équilibre; sur les vitesses virtuelles; des problèmes et des théorèmes de géométrie élémentaire.

Le format est in-4; chaque numéro, de quatre feuilles, est très-bien imprimé, à Cambridge (Massachusets) à une lieue de Boston et qui possède la plus ancienne université des États-Unis, fondée en 1638. Le prix annuel d'abonnement sur lieu est de 3 livres sterling pour un exemplaire, de 5 pour deux, de 11 pour cinq, de 20 pour dix abonnements.

Puisse ce nouveau semeur de la sainte doctrine prospérer, et propager la seule science qui ne renferme que des vérités abritées contre toutes les passions cupides, au cachet terrestre.

L'Amérique possède déjà un excellent journal d'astronomie, exécuté avec beaucoup de soins et très-estimé; elle a cela en commun avec toutes les grandes nations civilisées, excepté une seule.

Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelle).

(T. LVI, cahier I, 1858, de 100 pages.)

Géométrie.

H. Schrötter (p. 27 à 44). *Sur les courbes à double courbure de troisième classe et du troisième ordre.*

L'ordre est indiqué par le nombre de points d'intersection avec un plan, et la classe par le nombre de plans osculateurs qui passent par un point donné. Tout le Mémoire roule principalement sur les plans osculateurs, et on établit ce principe, que toute courbe à double courbure du troisième ordre est aussi de troisième classe.

nouvelle analogie avec les coniques et qui a été indiquée déjà par M. Chasles.

JOACHIMSTHAL (p. 44 à 45). *Observations sur le Mémoire précédent, à l'aide de la géométrie algorithmique.*

Il ramène à quelques lignes les dix-huit pages de M. Schrötter.

Analyse des formes.

ARNDT (Pierre-Frédéric) (*) (p. 64 à 71). *Solution d'un problème sur la décomposition des formes quadratiques.*

Est relatif au problème de l'article 236 des *Disquisitiones.*

Il s'agit de transformer par des substitutions linéaires à coefficients entiers la forme $AX^2 + BXY + CY^2$ dans le produit $(ax^2 + bxy + cy^2)(a'x^2 + b'xy + c'y^2)$, les *déterminants* de ces facteurs étant entre eux comme deux nombres carrés donnés.

ARNDT (Pierre-Frédéric) (p. 72 à 78). *Sur le nombre de genres* (genera) *des formes quadratiques.*

Solution dilucidée du si difficile problème § 286 des *Disquisitiones,* à l'aide de deux théorèmes établis comme lemmes.

ARNDT (Pierre-Frédéric) (p. 100). *Observation sur les formules qui expriment le nombre des classes des formes quadratiques.*

C'est une extension des formules contenues dans les

(*) Né le 23 août 1817, à Treptow sur la Rega; *privat-docent* à Berlin. On nomme ainsi ceux qui ont la permission de faire des cours publics, sans être professeurs.

célèbres *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres* de M. Dirichlet (*Crelle*, tomes XIX et XXI).

Analyse fonctionnelle.

RUDOLF LIPSCHITZ, à Bonn (p. 11 à 26). *Sur la représentation de certaines fonctions par la formule sommatoire d'Euler.*

Cette formule sommatoire est celle du *Calcul différentiel*, p. 430 : $Sx = \int z dx + \frac{1}{2} z + \ldots.$

L'auteur la compare aux recherches de Jacobi sur la formule de Maclaurin (*Crelle*, t. XII, p. 263) et au Mémoire de Poisson sur le calcul numérique des intégrales définies (*Mémoires de l'Institut*, t. VI; 1827); il discute avec profondeur et délicatesse la série qui exprime $\log F(a)$; discussion déjà faite par M. Liouville (t. IV, p. 317), et recherche dans quelles limites la série d'Euler est légitime.

E. HEINE, à Halle (p. 79 à 86). *Extrait d'une lettre au Rédacteur sur les fonctions* E.

On trouve ces fonctions dans le *Journal* de M. Liouville (t. IV).

E. HEINE, à Halle (p. 87 à 99). *Quelques propriétés des fonctions* E *de M. Lamé.*

Notre illustre géomètre s'est servi de ces fonctions pour l'attraction des ellipsoïdes; M. Heine donne de nouvelles solutions et s'appuie sur une propriété de déterminants qu'on doit à M. Painvin (*Journal* de M. Liouville, 1858, p. 41 et 42).

Mécanique.

NEUMANN, à Halle (p. 46 à 63). *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraelliptìcorum classem revocatur.*

Un point se meut sur la sphère $x^2+y^2+z^2=1$; la fonction *potentielle* des forces qui agissent sur le point est $ax^2+by^2+cz^2$; a, b, c sont des constantes positives ou négatives; $a>b>c$; on demande quel est le mouvement du point?

L'auteur fait usage des équations de Hamilton.

Application à l'attraction des ellipsoïdes.

A. CLEBSCHE, à Carlsruhe (p. 1 à 10). *Sur l'intégration des équations hydrodynamiques.*

C'est la suite d'un autre Mémoire sur le même sujet (*Crelle*, t. LIV, p. 254).

INDICES FRACTIONNAIRES, DIFFÉRENTIELS ET D'INTÉGRALES.

LEIBNITZ. — La première idée de ces indices est due à Leibnitz; on la trouve dans une Lettre adressée à Wallis, t. III des Œuvres de celui-ci, et dans plusieurs Lettres de la Correspondance entre lui et Jean Bernoulli.

EULER. — La première théorie est d'Euler, t. V des *Comm. de St.-P.*, où il cherche les termes interpolés d'une série dont le coefficient du $n^{ième}$ terme est $n!$ n étant entier; il suppose ensuite n fractionnaire et exprime les coefficients par des intégrales définies.

LAPLACE.

LIOUVILLE. $\frac{d\alpha^{\mu} e^{mx}}{dx^{m}} = m^{\mu} e^{mx}$, même pour μ fractionnaire.

TARDY. — Au Congrès de Milan en 1844.

PEACOCK. — *Report of the 3e meeting of the britisch Association.*

GREATHEED. — *Cambridge mat. Journal*, t. V, p. 1.

KELLAND. — *Transactions of the R. Society of Edinburgh*, t. V, p. 14 et 16.

CENTER. — *Camb. and Dub. mat. Journal*, t. V, p. 3 et 4.

LIOUVILLE. — T. XX, p. 116.

TARDY. — *Annali di mat. pura, etc.*, t. I, majo-giugno; 1858 (d'où ceci est extrait). Travail remarquable.

THÈSES PRÉSENTÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, le 7 août 1854; par M. *C.-Alph. Valson*. In-4 de 28 p. — M. Chasles, Président; MM. Lamé, Delaunay, examinateurs. Dédiées à M. Joseph Bertrand, professeur de M. Valson.

THÈSE D'ANALYSE.

Application de la théorie des coordonnées elliptiques à la géométrie de l'ellipsoïde.

Cette thèse renferme trois parties.

La première partie contient les propriétés connues des lignes de courbure et des sections principales (Moigno, *Calcul différentiel*, 35e leçon) et aussi les théorèmes de Jacobi sur les lignes géodésiques (*Journal* de M. Liouville, t. XI, p. 105). On y remarque ce théorème : *Si un mobile se meut librement sur un ellipsoïde, la pression*

qu'il exerce sur la surface est proportionnelle au cube de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent.

La seconde partie renferme les propriétés focales identiques à celles que M. Weierstrass a communiquées comme théorèmes nouveaux à l'Académie de Berlin au nom de M. Hellermann, et que nous avons consignées t. XVI, p. 242. C'est ce qu'il était bien permis à l'illustre analyste d'ignorer; puisque moi, habitant de Paris, à l'affût des nouveautés scientifiques, je l'ignorais; et ce qu'il y a de singulier, c'est que ces théorèmes si importants, si longtemps cherchés, qui transportent aux surfaces quadratiques les propriétés des lignes quadratiques, foyers et directrices, et assignent aux lignes de courbure un nouveau rôle, n'ont été nullement remarquées; et, comme il arrive assez souvent, les découvertes *indigènes* ne nous arrivent que par la voie *aborigène*.

De là, M. Valson passe aux propriétés projectives sur les sections circulaires et parvient encore à de très-belles propositions. Le point de départ est un théorème de M. Michael Roberts (*Journal* de M. Liouville, t. XV, p. 289). Soient μ et ν deux coordonnées d'un point M de l'ellipsoïde, M′ la projection de M sur une section circulaire par une parallèle à oz; si F et F′ sont les projections semblables des ombilics sur la même section circulaire; désignant par μ_0, ν_0 les demi-axes des courbes homofocales ayant F et F′ pour foyers et passant par le point M′ : on a

$$\mu = \nu\mu_0, \quad \nu = \alpha\nu, \quad \alpha = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}.$$

Ainsi

$$F(\mu, \nu) = 0$$

étant l'équation d'une ligne tracée sur l'ellipsoïde, sa pro-

jection sur la section circulaire sera

$$F(\alpha\mu_0,\ \alpha\nu_0) = 0.$$

L'auteur considère ensuite des sphères concentriques aux sphères focales et parvient à généraliser ainsi le théorème de M. Roberts cité ci-dessus : Savoir si une courbe tracée sur l'ellipsoïde est définie par l'équation

$$F(\mu,\ \nu,\ t,\ t') = 0,$$

où t et t' sont un couple de tangentes menées du point M à deux sphères concentriques aux sphères *focales*; sa projection sur la section circulaire parallèlement à l'axe *oz* a pour équation

$$F(\alpha\mu_0,\ \alpha\nu_0,\ \alpha t_0,\ \alpha t'_0) = 0;$$

t_0, t'_0 sont un couple de tangentes passant par le point M, à deux cercles ayant pour centres les foyers F et F′ des courbes homofocales.

Tout ce beau travail se résume en cet énoncé :

Si une propriété a lieu entre les tangentes qu'on peut mener par les points d'une courbe à deux cercles dans un plan, il y aura une propriété correspondante entre les tangentes qu'on peut mener des divers points d'un ellipsoïde aux deux sphères focales ou à deux sphères qui leurs soient concentriques (p. 17).

La troisième et dernière partie traite des lignes *rectifiables* qu'on peut rencontrer sur l'ellipsoïde; on parvient naturellement aux lignes géodésiques et à des lignes dont l'équation est de même forme que celle des lignes géodésiques; et le tout est terminé par des considérations sur les trajectoires *obliques* des lignes géodésiques.

Cette belle thèse est un progrès. Le jeune professeur s'est montré fidèle à la devise de la nouvelle génération: *go a head*.

QUESTION DE PRIX

Proposée par l'Académie des Sciences de Berlin.

Die theorie der Krümmungs-Linien der flächen in irgend einem wesentlichen Punkte zu vervollständigen.

« Compléter en quelque point essentiel la théorie des » lignes de courbure des surfaces. »

Il ne s'agit pas d'augmenter le nombre des surfaces dont on puisse connaître les lignes de courbure, mais de considérations plus générales, plus importan'es : par exemple, de chercher les conditions nécessaires pour que les lignes de courbure des surfaces algébriques soient elles-mêmes des courbes algébriques, ou bien la détermination de ces genres de courbes sur les surfaces du troisième ordre ou d'un ordre supérieur.

Les Mémoires peuvent être rédigés en allemand, en latin ou en français. Le terme d'envoi est fixé au 1er mars 1861, et le prix de 100 ducats (1175 francs) sera décerné à la séance publique, anniversaire de Leibnitz, au mois de juillet 1861.

Chaque Mémoire doit porter une devise sur un bulletin cacheté contenant le nom de l'auteur.

NOTE SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES ;

D'APRÈS M. OTTO BÖKLEN.

Schlömilch *Zeitschrift*, cahier IV, 1858, p. 257.

1. Gauss a démontré que toutes les lignes géodésiques d'égale longueur qui partent d'un même point d'une surface sont perpendiculaires sur la courbe formée par les extrémités de ces lignes. De là, en faisant usage des mêmes considérations infinitésimales usitées pour les coniques planes, on peut déduire le théorème qui suit :

THÉORÈME. *Étant pris sur une surface deux points fixes et un point variable dont la différence des distances géodésiques aux points fixes soit constante, la ligne décrite par le point variable divise en parties égales l'angle formé par les distances et l'angle supplémentaire lorsque la* somme *est constante ; et, réciproquement, si le point variable bissecte l'angle des distances ou son angle adjacent, la différence des distances ou la somme sera constante.*

2. Soient A et B les points fixes, M le point variable. Si l'on pose

$$MA - MB = \mu,$$

$$MA + MB = \nu;$$

μ et ν étant des constantes. En donnant à μ et à ν diverses valeurs, on trace sur la surface deux systèmes de lignes homofocales et se coupant à angle droit ; même démonstration que pour les coniques planes.

3. *Lemme.* Si l'on prend un point quelconque sur une ligne géodésique tracée sur un ellipsoïde, et que par

ce point on mène une tangente à la ligne et un plan tangent à la surface, la distance du centre au plan tangent multiplié par le diamètre parallèle à la tangente donne un produit constant pour tous les points de cette ligne géodésique. (JACOBI.)

4. *Lemme.* Si par un point d'un ellipsoïde, on mène les deux tangentes aux deux *lignes de courbure* qui passent par ce point, ces tangentes sont parallèles aux axes de l'ellipse diamétrale parallèle au plan des deux tangentes.

5. THÉORÈME. *Si l'on prend sur l'ellipsoïde pour points focaux les deux* ombilics A *et* B, *et que, pour le point variable* M, *on ait*

$$MA - MB = \mu,$$
$$MA + MB = \nu;$$

faisant varier μ *et* ν, *les deux systèmes homofocaux* (n° 2) *sont des lignes de courbure.*

Démonstration. Le produit constant (Jacobi) en M est le même qu'en A et B, il est donc le même pour l'arc MA et pour l'arc MB; donc sont égaux les diamètres parallèles aux tangentes menées par M aux deux arcs; ainsi les axes de l'ellipse qui passe par ces deux diamètres sont bissecteurs des angles de ce diamètre; donc aussi les tangentes en M parallèles à ces diamètres sont bissecteurs des angles formés par les tangentes aux axes géodésiques. Donc la courbe lieu du point M est une ligne de courbure (n° 4). Lorsque cette ligne passe entre A et B, on a

$$MA + MB = \mu,$$

et lorsqu'elle laisse les points d'un même côté, on a

$$MA - MB = \nu.$$

Ce théorème est de M. Michael Roberts (*Journal* de

M. Liouville, t. XI, p. 1), mais qui le démontre à l'aide de fonctions elliptiques. Ainsi les deux lignes de courbure qui sur un ellipsoïde passent par un point donné, jouissent de cette propriété : dans l'une, la somme des distances aux ombilics est constante, c'est celle qui passe entre les deux ombilics; et dans l'autre, c'est la différence qui est constante.

6. Ces théorèmes sont susceptibles d'être généralisés au moyen du théorème suivant, aussi de Gauss :

Si de tous les points d'une ligne quelconque tracée sur une surface on mène orthogonalement et du même côté des lignes géodésiques de même longueur, elles coupent à angle droit la ligne qui réunit leurs extrémités.

Note du Rédacteur. Réunissant les deux ombilics par une ligne géodésique et faisant passer deux lignes de courbure par un ombilic, on en conclut facilement qu'il y a une infinité de lignes géodésiques qui joignent les deux ombilics; que ces lignes sont d'égale longueur; que les sections normales aux ombilics sont d'égale courbure en ces points.

Cette dernière propriété sert à définir les ombilics sur une surface quelconque.

Lorsque la ligne géodésique passe par les ombilics, la tangente en MA et la tangente MB coïncident (*voir* ci-dessus); donc le diamètre parallèle à cette tangente est l'axe de l'ellipse; par conséquent, au point A, une ligne de courbure touche la ligne géodésique et la coupe orthogonalement; une nappe de lignes de courbure qui passent par une ligne géodésique a pour enveloppe cette ligne géodésique et l'autre nappe a pour enveloppe une certaine développée de la ligne géodésique.

BIBLIOGRAPHIE.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

(voir p. 6).

(T. XLVI, 2e cahier, 101 à 188 pages.)

Géométrie.

JOHANN NIK. BISCHOFF, à Munich (p. 166 à 177). *Quelques théorèmes sur les tangentes des courbes algébriques.*

Ces théorèmes sont des applications des théorèmes algebriques suivants :

Théorèmes algébriques.

1°. $$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m),$$

et le dernier terme T de l'équation qui a pour racines les sommes des racines α prises deux à deux est une fonction entière des a, de degré $m - 1$.

2°. Les a étant des fonctions de m variables,

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1};$$

les fonctions en y_0 étant de degré g_0, la fonction en y_1 de degré g_1, etc., le terme T devient une fonction entière de ces mêmes variables et si la série des g forme une progression arithmétique, de sorte que l'on a

$$g_i = g_0 + id,$$

le degré T relativement aux variables monte au degré

$$\frac{1}{2}(m-1)(g_0+g_m).$$

3°. Dans la même hypothèse, si *au moins* l'une des racines de l'équation $y_1, y_2, \ldots$ est la *moitié* d'une autre racine, l'équation de condition relativement aux variables monte au degré

$$(m-1)(2g_0+md)\ (*).$$

4°. Dans la même hypothèse, si *au moins* l'une des racines est une moyenne arithmétique entre deux autres racines, l'équation de condition monte relativement aux variables au degré

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(2g_0+md).$$

5°. Les a restant constants, si *au moins* l'une des racines α est une moyenne arithmétique entre deux autres racines, l'équation de condition relativement aux a monte au degré

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

Théorèmes géométriques.

1°. Une courbe d'ordre m a

$$\frac{1}{2}m(m-2)(m-3)(m+4)$$

tangentes telles, que le point de contact est au milieu

(*) Le tout est fondé sur la théorie des fonctions symétriques qu'on n'enseigne plus.

Ἐν ὀλίγοις ὁ λόγος τῆς σιγῆς κρείττων.

(Pindare, *Pyth.* od. I.)

entre deux des $m - 2$ points d'intersection de cette tangente avec la courbe; et ces points de contact sont sur une courbe d'ordre

$$\frac{1}{2}(m-2)(m-3)(m+4).$$

2°. Une courbe d'ordre m a

$$m(m-2)(m-3)(m+4)$$

tangentes telles, qu'un des points d'intersection est au milieu entre un autre point d'intersection et le point de contact.

3°. Une courbe d'ordre m (*) a

$$m(m-2)(m-3)(m^2-m-8)$$

tangentes telles, que le point de contact est au milieu entre deux points d'intersection, ou bien qu'un point d'intersection est au milieu entre deux autres points d'intersection.

Théorèmes géométriques; contacts de courbes.

4°. Étant donnés $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ points *fixes* et une courbe de degré n; il existe $n(n+2m-3)$ lignes d'ordre m qui passent par les points fixes et touchent (contact bi-ponctuel) la courbe d'ordre n.

5°. Si une courbe d'ordre m doit toucher (contact simple) une courbe d'ordre n, l'équation de condition monte au degré $n(n+2m-3)$ relativement aux coefficients de la première courbe.

6°. Étant donnés $\frac{m(m+3)}{2} - \mu$ points fixes et μ cour-

(*) M. Bischoff attribue ce théorème à Steiner (voir *Journal* de M. Liouville, t. XVIII, p. 348, 1853). Ce Mémoire remarquable traduit par M. Woepcke renferme principalement des propriétés polaires et segmentaires.

bes d'ordres respectifs, $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_\mu$, il existe

$$n_1 n_2 n_3 \ldots n_\mu (n_1 + 2m - 3)(n_2 + 2m - 3)\ldots(n_\mu + 2m - 3)$$

courbes d'ordre m qui passent par les points fixes et touchent (contact simple) les μ courbes.

Exemple :

$$m = 2, \quad \mu = 5, \quad n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 2 \ (*)$$

5 coniques sont touchées simultanément par $6^5 = 7776$ coniques.

7°. Le nombre de courbes d'ordre m qui passent par $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ points fixes et touchent en contact *triponctuel* une courbe d'ordre n, est $3n(n+m-3)$; et on peut faire passer une courbe d'ordre $3(n+m-3)$ par les points de contact.

8°. L'équation de condition pour que deux courbes d'ordre m et n se touchent monte *au plus* au degré

$$2mn + (m+n)(m+n-3)$$

relativement aux coefficients des deux courbes.

9°. Le nombre de courbes d'ordre m qui passent par $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ points fixes et ont un *double* contact avec une courbe d'ordre n est

$$\frac{1}{2} n^2 (n + 2m - 3)^2 - n(5n + 6m - 15).$$

Faisant

$$m = 1,$$

(*) Cela paraît faux lorsque $m = 2$ et les $n = 1$, car on a

$$\frac{m(m+3)}{2} - \mu = 5 - \mu.$$

Donc le nombre de coniques qui passent par $5 - \mu$ points et touchent μ droites est 2^μ; ce qui est faux pour $\mu = 5$.

on a

$$\frac{1}{2}n^2(n-1)^2+n(5n-9)=\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$$

doubles tangentes par une courbe d'ordre n.

Contacts de surface.

10°. Le nombre de surfaces d'ordre p qui passent par $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}-2$ points fixes et touchent (contact bi-ponctuel) une courbe à double courbure d'ordre mn (intersection de deux surfaces d'ordres m et n) est

$$mn(m+n+2p-4).$$

11°. Le nombre de surfaces d'ordre p qui passent par $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}-3$ points et touchent une courbe à double courbure d'ordre mn, contact tri-ponctuel, est

$$3\,mn(m+n+p-4).$$

12°. Si dans le cas précédent, au lieu d'un contact tri-ponctuel, il y a double contact, le nombre de surfaces est

$$\frac{1}{2}m^2n^2[m+n+2p-4]^2-mn[5m+5n+6p-20].$$

13°. Faisant $p=1$, il s'ensuit que la surface développable qui a la ligne mn pour arête de rebroussement est de la classe $3\,mn(m+n-3)$ et que par chaque point de l'espace passent des *plans* qui ont un double contact avec les courbes mn au nombre de

$$\frac{1}{2}m^2n^2(m+n-2)^2-mn(5m+5n-14).$$

Cayley (A.), p. 182 à 185. *Note sur les normales d'une conique* (en français).

Théorème de Joachimstal. ABCD est un quadrilatère inscrit dans une conique tel que les normales qui passent par les quatre sommets se coupent en un seul point. Soit O le centre de la conique, P le pôle de AB; prolongeons PO d'une longueur égale à elle-même dans le sens PO; soit P′O = PO; la droite qui réunit les projections P′ sur les axes principaux se confond avec le côté CD. (*Nouvelles Annales*, t. VI, p. 369.)

M. Cayley généralise ce théorème.

Analyse.

Kronecker (L.), p. 188 à 188. *Sur les équations cubiques à coefficients rationnels.*

L'équation

$$r^3 + s^3 - 1 = 0$$

ne peut être satisfaite par des valeurs rationnelles que par $r = 0$, $s = 1$, ou $r = 1$, $s = 0$ (Fermat).

Posons

$$r = \frac{2a}{3b+1}, \quad s = \frac{3b+1}{3b-1}, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad a = -1$$

(correspond à $r = -1$, $b = 0$),

on obtient

$$(3b-1)^3(r^3 + s^3 - 1) = 2(4a^3 + 27a^2 + 1) = 0,$$

$$ma = -1; \quad b^2 = \frac{1}{9};$$

soit l'équation

$$x^3 + ax + b = 0,$$

le dernier terme de l'équation au carré des différences est

$$-4a^3 - 27b^2 \text{ (valeur négative du } \textit{discriminant}\text{).}$$

Pour le cas actuel, l'équation est

$$x^3 - x \pm \frac{1}{3} = 0;$$

c'est donc la seule équation cubique à coefficients rationnels pour laquelle la somme des racines est nulle et où le discriminant est égal à l'unité (car $-4a^3 - 27b^2 = 1$). Les trois racines sont

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{9}, \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi}{9}, \quad \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{9}{4\pi}.$$

Le théorème de Fermat sur l'équation $x^3 + y^3 = z^3$ peut donc s'énoncer sous cette forme remarquable :

Le discriminant d'une équation cubique complète à coefficients rationnels ne peut devenir la sixième *puissance d'un nombre rationnel à moins que les trois racines ne soient de la forme*

$$m + n\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}, \quad m + n\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}, \quad m - n\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9},$$

m *et* n *étant des nombres rationnels.*

$-3m$ est le coefficient de x^2.

Arndt (F.), p. 178 à 181. *Démonstration simple de l'irréductibilité de l'équation relative à la division du cercle.*

Cette équation est

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 = 0.$$

Kronecker a donné une démonstration lorsque n est un

nombre entier quelconque (Liouville, 1854, p. 177), et d'autres démonstrations pour le cas où n est un nombre premier ou puissance de nombre premier (Liouville, 1856) et (*Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 419, et t. IX, p. 348); les démonstrations de Gauss (*Disq.*, § 341) et d'Eisenstein (Crelle, t. XXXVII) ne paraissent pas pouvoir s'étendre au cas général.

La démonstration actuelle est fondée sur ce lemme :

Soient les équations

$$x^m - \lambda_1 x^{m-1} + \lambda_2 x^{m-2} \ldots = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots = \Pi(x-\alpha),$$
$$x^m - \mu_1 x^{m-1} + \mu_2 x^{m-2} \ldots = (x-\alpha^e)(x-\beta^e)(x-\gamma^e)\ldots = \pi(x-\alpha^e).$$

Les λ sont des nombres entiers, e est un nombre entier positif.

Les μ seront aussi des nombres entiers; si $e = p^\pi$, p étant un nombre premier et π un nombre entier positif, on a la congruence

$$\Pi(x-\alpha^e) - \Pi(x-\alpha) = \dot{p},$$

(le point leibnitzien désigne le multiple de p.)

Arithmologie.

Cayley (p. 186 à 187). *Addition à la Note sur la composition du nombre 47 par rapport aux vingt-troisièmes racines de l'unité.*

Soit α une racine complexe de l'équation

$$x^{23} - 1 = 0,$$

on a cette remarquable identité communiquée à M. Cayley par M. Kummer

$$(\alpha^2 + \alpha^{21})(\alpha^{16} + \alpha^{13} + \alpha^8 + \alpha^{15} + \alpha^7 + \alpha^{16})^3$$
$$= (\alpha^8 + \alpha^{15})(\alpha^9 + \alpha^{14})(\alpha^{10} + \alpha^{13})^2(\alpha^{11} + \alpha^{12})\,\mathrm{F}(\alpha)\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$
$$\mathrm{F}(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^9 + \alpha^{10} + \alpha^{16} - \alpha^{20} + \alpha^{22}.$$

M. Cayley ramène

$$\frac{\alpha^2 + \alpha^{21}}{(\alpha^8 + \alpha^{14})(\alpha^9 + \alpha^{14})(\alpha^{10} + \alpha^{13})^2(\alpha^{11} + \alpha^{12})}$$

à cette forme

$$\begin{aligned}
&- 23\alpha + 2\alpha^2 - 20\alpha^3 - 21\alpha^5 - 3\alpha^6 \\
&- 17\alpha^7 - 4\alpha^8 - 14\alpha^9 - 8\alpha^{10} - 12\alpha^{11} \\
&- 23\alpha^{22} + 2\alpha^{21} - 20\alpha^{20} - 21\alpha^{18} - 3\alpha^{17} \\
&- 17\alpha^{16} - 4\alpha^{15} - 14\alpha^{14} - 8\alpha^{13} - 12\alpha^{12},
\end{aligned}$$

et le profond investigateur déduit d'une manière admirable que les coefficients de $F(\alpha)$ doivent être 1, 1, 1, 1, 1, —1, 1.

Calcul infinitésimal.

A. Clebsch (p. 122 à 148). *Sur la variation seconde des intégrales multiples.*

On sait que cette variation seconde fournit un criterium des maximums et des minimums pour des intégrales simples. On est parvenu, par des intégrations partielles, à ramener ces variations secondes à une forme plus simple, mais à l'aide d'intégration d'un système d'équations différentielles assez compliquées. Jacobi le premier a fait voir que pour des intégrales simples à une *seule* variable, il existait une connexion entre ce système et celui qui amène l'évanouissement de la variation première, et dans ce cas l'intégration de ces équations *transformatrices* s'opère sans difficulté.

Dans un précédent Mémoire, M. Clebsch (t. LV) a montré que le principe de Jacobi peut s'étendre à tous les problèmes du calcul des variations lorsqu'il ne s'agit que d'intégrales *simples*. La recherche des variations se-

condes a été ramenée à la recherche des valeurs que peut prendre une fonction homogène du second ordre dont les paramètres sont liés par certaines équations de conditions linéaires. Dans ce Mémoire, on établit aussi une telle fonction lorsque même l'intégrale est multiple.

G. BAUER (p. 101 à 121). *Sur les coefficients des séries dont les termes sont des fonctions* sphériques *d'une seule variable.*

Soit

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Ces fonctions X_n sont dites *sphériques*, parce qu'on les rencontre dans les problèmes sur l'attraction des sphéroïdes.

Soit $f(x)$ une fonction donnée de x.

Posons

$$f(x) = \sum A_n X_n$$

ou

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} fx\, X_n\, dx.$$

Le but de ce Mémoire est le calcul des coefficients A. M. Lejeune-Dirichlet a traité cette question pour le cas où $f(x) = x^k$ (*Journal* de M. Liouville, 1857), et par une méthode qui n'est pas élémentaire. Même dans ce cas si simple, le calcul effectif des A est très-compliqué. Par des considérations très-élémentaires, M. Bauer donne ces coefficients pour beaucoup de cas.

Exemples :

1°. $f(x) = e^{ax}$, $A_n = (-1)^n \frac{2n+1}{2a} P_n e^a - Q_n e^{-a}$,

$$e^{-2a} = \frac{1}{1} = \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{a} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{a} + \cfrac{1}{\cfrac{7}{a} + \ldots}}}}$$

P_n est le numérateur et Q_n le dénominateur de la $n^{ième}$ réduite de cette fraction continue, ou encore de cette seconde fraction continue :

$$\tang a = \frac{a}{1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{a} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{a} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{a} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{a} - \ldots}}}}$$

C'est une conséquence des relations

$$P_{n+1} - P_{n-1} - \frac{2n+1}{a} P_n = 0,$$

$$Q_{n+1} - Q_{n-1} - \frac{2n+1}{a} Q_n = 0.$$

2°. $\quad fx = (1 - a^2 x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad A_{2n} = Q_{2n} \frac{\arcsin a}{a} P_{2n} \sqrt{1-a^2},$

Q_n et P_n sont déterminés par les deux termes d'une réduite de fraction continue. L'auteur déduit plusieurs conséquences intéressantes, entre autres :

$$Q_{2n} = (4n+1)\left(\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\right)^2,$$

$$X_{2n} = (-1)_n \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n},$$

$$\frac{2}{\pi} = \sum Q_{2n} X_{2n}.$$

Ainsi

$$\frac{2}{\pi}=1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3-13\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\ldots,$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

$$=\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 r^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right) r^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right) r^4+\ldots\right]$$

3°. $$f(x)=(a+x)^m;$$

A_n se détermine encore par une fraction continue qui devient finie lorsque m est un nombre entier positif.

Lorsque $a=0$ et m est entier positif, l'auteur trouve, d'accord avec M. Dirichlet,

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\,\frac{m(m-2)\ldots m-n+2}{m+1.m+3\ldots m+n+1}\ (n \text{ pair}),$$

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\,\frac{m-1.m-3\ldots m-n+2}{m+2.m+4\ldots m+n+1}\ (n \text{ impair}),$$

déjà trouvé par Legendre (*Recherches sur la figure des planètes*, Académie des Sciences, 1784).

L'auteur considère les cas de $a=-1$ et m entier négatif, et en déduit la sommation de plusieurs séries, entre autres de celle-ci

$$1+\frac{a^2}{2.(2n+3)}+\frac{a^4}{2.4.2n+3.2n+5}$$

$$+\frac{a^6}{2.4.6.2n+3.2n+5.2n+7},$$

et celle où les termes de rang pair sont négatifs.

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN. Vierd deel. — Mémoires de l'Académie des Sciences. 4e partie., Amsterd. C. G. von der Post, 1858.

TABLES D'INTÉGRALES DÉFINIES,

PAR D. BIERENS DE HANN.

De XVI—572 pages.

Il est superflu de faire ressortir l'immense utilité d'une telle collection auprès des géomètres compétents, et il serait ridicule d'insister auprès de ceux qui ne sont pas compétents. Pour peu qu'on s'occupe de l'analyse infinitésimale, ce recueil devient indispensable; car il est mieux ordonné, plus méthodique et plus complet que tout ce qu'on a publié en ce genre, et a peut-être le défaut rare d'être trop complet; la description de certains ouvrages suffit pour en faire apprécier le mérite; tel est celui-ci.

L'ouvrage, entièrement écrit en français, se compose de 447 tables distribuées sur 572 pages in-4°. Chaque table a pour en-tête : 1° la nature des expressions à intégrer (algèb. transcend., etc.); 2° le quantième de la table; 3° les limites entre 0 et 1, 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ à ∞. Ces trois indications sont renfermées entre deux lignes parallèles; ensuite au-dessous les expressions intégrales avec les noms des calculateurs, des ouvrages et l'indication des pages (*).

Les exemples sont numérotés et placés les uns au-dessous des autres, et le quantième de la page est au bas de la page. L'ouvrage commence à la page 25.

Dans la préface l'auteur indique quatre buts qu'il a

(*) A ces renseignements, on reconnait que l'auteur n'est pas Français.

cherché à remplir : 1° écrire les différents résultats d'une manière méthodique et bien ordonnée; 2° donner les divers modes de déduction : la réalisation de cette idée aurait rendu l'ouvrage extrêmement volumineux; on a dû se contenter d'indiquer les ouvrages où l'on peut trouver ces déductions ; 3° donner un tableau historique et bibliographique de cette branche de l'analyse. A cet effet, l'auteur avait demandé des renseignements par la voie des journaux scientifiques; mais personne n'a répondu à son appel; de sorte que ce but n'a pu être complétement atteint. L'auteur n'avait à sa disposition que les collections académiques et les Journaux de Crelle et de Liouville. Il y a 68 géomètres de cités dont 17 sont Français, savoir : Abria, Berge, Bertrand, Binet, Bonnet (Ossian), Catalan, Cauchy, Delaunay, Fourier, Lamé, Laplace, Lebesgue, Lefort, Legendre, Liouville, Poisson, Serret. Enfin le quatrième but était l'examen de certaines intégrales définies dont les résultats sont contestés. L'auteur indique pourtant ces résultats sans se permettre de les juger, même lorsque ses opinions sont bien fixées. Les calculs des intégrales connues ont été vérifiés, l'auteur a soin d'indiquer les fautes et de les rectifier; et par la méthode des intégrales partielles, l'auteur a donné de nouvelles intégrales; les résultats sont au nombre d'à peu près 3200; près de 780 corrections et observations critiques remplissent 8 pages.

Cette collection contient trois parties. Chaque partie est divisée en sections selon que les fonctions sont algébriques, exponentielles, logarithmiques, circulaires, directes ou inverses, et chaque section est subdivisée, selon que les fonctions sont monômes, binômes, polynômes, rationnelles, irrationnelles, entières, fractionnaires, et aussi selon les limites des intégrales.

PREMIÈRE PARTIE (table I à III, six sections).

Intégrales de fonctions ne contenant qu'une espèce de fonctions.

Algébrique (1 à 35) rationnels et entiers.

Exemples :

$$(1 - x^b)^p x^{q-1} dx \quad \text{(limite 0 à 1)}.$$

Fractionnaire.

Exemples :

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{p+1}}{x^p} dx \text{ (OEttinger)};$$

$$\int_0^1 \frac{x^{q-1} dx}{1 - x^q} \text{ (Lebesgue, p. 31)};$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{dx}{1+px} \text{ (Bertrand, p. 35)};$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^a}{(1+x)^{a+1}} \frac{dx}{1-x} \text{ (Serret)};$$

$$\int_0^1 x^{2a} (1-x^2)^{b-\frac{1}{2}} dx \text{ (Euler)};$$

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \text{ (Catalan, p. 43)};$$

$$\int \frac{x^{p-1} + x^{q+1}}{(1-x^2)^{\frac{p+q}{2}}} \text{ (Serret, p. 44)};$$

$$\int \frac{x^{\frac{q}{2}} dx}{(1-x)(1-p^2 x)^{\frac{q+1}{2}}} \text{ (Boncompagni, p. 49)};$$

A partir de la table 18 les limites viennent de o à ∞, $-\infty$ à $+\infty$,

$$\int \frac{(p+xi)^{a-1}}{(1-p-xi)^{a+b}}\,dx \quad (\text{Cayley, p. 68}).$$

Legendre, Poisson, Cauchy, Raab, Œttinger, Schlömilch.

Deuxième partie (table 112 à 375, p. 169 à 483; sections VII à XX).

Intégrales de fonctions composées de deux fonctions.

Exemples :

Table 116, p. 173,

$$\int e^{-x q^i} x^{a-1}\,dx \quad (\text{L. } 0 \text{ à } \infty) \quad (\text{Serret}).$$

Table 127, p. 186,

$$\int \left(e^{-x} + \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x} \quad (\text{L. } 0 \text{ à } \infty) \quad (\text{Stern}).$$

Table 142, p. 205,

$$\int e^{ix}(r+ix)^{a-1}\,dx \quad (\text{L. } -\infty \text{ à } +\infty) \quad (\text{Cayley}).$$

A partir de la table 151 apparaissent les transcendantes $(lx)^a$.

A partir de la table 161, logarithmes combinés avec des lignes trigonométriques.

Exemples :

$$\int \left[\frac{1-x}{l'x} + \frac{x}{(lx)^2}\right] dx = -1 + lx \quad (\text{L. } 0 \text{ à } 1) \; (\text{t. 168, p. 234}).$$

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{lx}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad (\text{table 178, p. 270}). \; (\text{O. Bonnet}).$$

Dans la table 191, on rencontre des *ll*.

Exemples :

$$\int_0^\infty llx \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\pi l \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \sqrt{2\pi} \right) \quad \text{(Malmsten).}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin qx \cos x}{x} dx &= \frac{1}{2}\pi, \quad q > 1, \\ &= 0, \quad q < 1, \end{aligned}\right\} \quad \text{(t. 195, p. 270) (Serret).}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos bx . x^{\pm 2a}}{1 - 2p\cos x + p^2} dx = (-1)^a \pi \frac{p^b}{1-p^2} (lp)^{\pm 2a}$$

(t. 250, p. 342) (Bierens de Haan).

$$\int_0^\infty e^{-px} l(q-x)^2 dx = \frac{1}{p}[lq^2 - 2e^{-pq} \mathrm{E}i(pq)]$$

(Bierens de Haan).

$$\mathrm{E}i(pq) = \int_{-pq}^\infty \frac{e^{-pq} d(pq)}{pq} \quad \text{(exponentielle intégrale, p. 369).}$$

Les noms qui apparaissent le plus fréquemment dans cette partie, sont Binet, Cauchy, Laplace, Poisson, Raab, Schlömilch, et aussi quelquefois Dienger, OEttinger et Lobatschewsky (de Casan), Malmsten.

Les tables 252, 253, 254, 262 renferment les fonctions elliptiques.

Troisième partie (tables 376 à 447, p. 487 à 572, sections XXI à XXVI).

Contient les intégrales des fonctions à argument de plusieurs fonctions.

Exemples :

$$\int_0^{\infty} e^{-qx^a}(qx^a - p)\,x^{ap-1}\,lx\,dx = \frac{1}{a^2 q^p}\,\Gamma(p),$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px}\sin qx . x^{r-1}\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(r)}{p^r}\cos^r\left(\text{arc tang}\frac{q}{p}\right)\sin\left(r\,\text{arc tang}\frac{q}{p}\right)$$

(t. 386, p. 499) (Serret et Boncompagni).

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (l\,\text{tang}\,x)^3\,\frac{x}{\sin 2x}\,dx = -\frac{5}{512}\,\pi^5$$

(t. 410, p. 529) (Euler).

Mêmes noms que dans la deuxième partie.

Le sommaire très-détaillé qui est au commencement du volume (p. 5 à 19) est une dichotomie analytique si bien faite, qu'on peut trouver tout de suite l'intégrale dont on a besoin et insérer de nouveaux résultats ; à cet effet, il est nécessaire de faire intercaler par le relieur des pages blanches.

On peut aussi recommander l'ouvrage aux professeurs enseignants. Ils y trouveront en profusion des exercices de quadratures à proposer aux élèves, aujourd'hui que les différentielles et les intégrales sont entrées dans nos écoles sous le masque de fonctions primes et primitives.

... Licuit, semperque licebit
Signatum præsente notâ producere nomen.
(Horat., *Ars poetica.*)

Il est à désirer qu'on nous donne une collection semblable d'intégrales d'*équations* différentielles, classées par ordre, degré, nombre de variables, nombre d'équations ; de même pour les différences partielles et pour les

différences finies. C'est aux grandes académies à encourager de tels travaux, en se chargeant des frais d'impression. Trois académies, Pétersbourg, Berlin, Amsterdam, sont entrées dans cette voie et ont bien mérité de la science.

LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS CIRCULAIRES ET LA TRIGONOMÉTRIE; par le P. *I.-L.-A. Le Cointe*, de la Compagnie de Jésus, professeur au collége Sainte-Marie, à Toulouse. Ouvrage destiné à la préparation aux Écoles du Gouvernement et spécialement à l'École Polytechnique. In-8 de 385 pages. Paris, chez Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55. Prix : 6 francs.

L'ouvrage du P. Le Cointe se présente au public sous le patronage éminent de M. le doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse, qui en a fait un Rapport très-favorable à l'Académie des Sciences de cette ville (séance du 9 décembre 1858), et il n'est pas douteux que ces éloges seront ratifiés par tous ceux qui le liront avec l'attention qu'il mérite.

Nouveau par l'introduction d'un assez grand nombre de questions, cet ouvrage l'est encore par l'ordre adopté pour la distribution des matières. Comme un grand nombre de questions, appartenant à la théorie des fonctions circulaires, n'ont aucun rapport avec la trigonométrie, l'auteur a justement établi une démarcation absolue entre ces deux branches des sciences mathématiques.

La théorie des fonctions circulaires, qui fait le sujet de la première de ces deux grandes divisions du livre, comprend trois parties :

Dans la première partie, intitulée *Étude analytique et élémentaire des fonctions circulaires*, l'auteur considère

comme des rapports les lignes trigonométriques (sinus, tangente, sécante, etc.), étudie les lois de leurs variations, établit les relations qui existent entre les rapports trigonométriques d'un même arc et celles qui concernent l'addition et la multiplication des arcs; fait connaître les limites de certaines fonctions circulaires simples ou composées, et se trouve ainsi conduit naturellement à exposer les principes de la construction des Tables trigonométriques. Le rayon est toujours désigné par R, le cercle par C et la demi-circonférence par H (*). Des exemples numériques bien choisis, parmi lesquels se présente la résolution de certaines équations transcendantes, servent d'application. Dans ces exemples, l'auteur s'attache toujours à rendre les formules propres au calcul logarithmique; c'est en effet une précaution qu'on prend généralement dans la pratique. Cependant elle n'est pas d'une nécessité absolue et quelquefois même elle occasionne une perte de temps. On pourrait donc désirer de trouver quelques exemples du calcul immédiat de formules non rendues logarithmiques, effectué néanmoins à l'aide des Tables de logarithmes qui sont seules en usage.

La seconde partie, intitulée *Étude analytique et complémentaire des fonctions circulaires*, traite des propriétés relatives à la sommation des suites limitées de certaines fonctions circulaires. On y trouve les formules de Moivre, de Jean Bernoulli et plusieurs autres dues à Euler et à Fuss.

L'auteur expose ensuite la résolution des équations binômes; un grand nombre de propriétés concernant les différentes valeurs des radicaux $\sqrt[m]{1}$ et $\sqrt[m]{-1}$, *m* étant un nombre entier positif; la théorie des polygones réguliers

(*) Cette notation aurait pu être évitée pour prendre celle qui est en usage. TM.

convexes et étoilés; la division de la circonférence en dix-sept parties égales, et plusieurs théorèmes relatifs à la multiplication des arcs. Cette seconde partie se termine par la résolution des équations algébriques du troisième degré.

La troisième partie est consacrée à une étude élémentaire et géométrique des fonctions circulaires. C'est dans cette partie que l'auteur a réuni les différentes propriétés géométriques qui sont le fondement de la trigonométrie rectiligne et de la trigonométrie sphérique.

Parmi les propriétés relatives à la division du cercle en parties égales, on trouve le théorème de *Moivre*, celui de *Cotes*, qui en est une conséquence, et plusieurs autres propositions intéressantes extraites du *Journal mathématique de Cambridge*. L'auteur donne (p. 264) une démonstration très-simple du théorème de *Lexell*, et termine cette troisième partie par un *appendice* où il a réuni plusieurs théorèmes qui ne se rattachent à la théorie des fonctions circulaires que par certaines démonstrations dont ils sont susceptibles.

La trigonométrie, réduite à ce qu'elle est essentiellement, savoir : la résolution des triangles, est traitée, dans le chapitre suivant, avec tous les développements qu'elle comporte. L'auteur a eu soin d'y ajouter quelques applications numériques qui indiqueront aux élèves l'ordre qu'il convient de suivre dans les calculs des formules trigonométriques.

Enfin, l'ouvrage se termine par une collection fort riche de questions, que l'auteur propose comme exercices, dont plusieurs sont nouvelles, et dont le choix sera très-apprécié des professeurs. Quelques-unes de ces questions sont extraites des *Nouvelles Annales de mathématiques*, des *Actes de Pétersbourg*, du *Journal de Crelle*, du *Bulletin de Férussac* et des ouvrages de *Delambre* et de *Puissant*.

En résumé, l'ouvrage du P. Le Cointe dénote chez son auteur une grande érudition et un talent exercé; c'est une mine féconde où pourront puiser abondamment tous ceux qui veulent approfondir l'étude de cette branche des sciences mathématiques, et MM. les Professeurs y trouveront, pour l'enseignement de leurs élèves, un grand nombre d'éléments réunis, qu'ils chercheraient vainement dans d'autres recueils. E. J.

Note du Rédacteur. Parmi les qualités de ce savant ouvrage, nous signalerons les notions historiques et les citations *in extenso* des sources : preuve d'érudition et aussi devoir de conscience. C'est l'ouvrage le plus complet sur les fonctions circulaires et sur les sommations de séries circulaires finies. Aux p. 100 à 106, on trouve des solutions d'équations transcendantes, si en vogue aujourd'hui, par exemple, le système d'équations

$$x + y + z = 180^\circ,$$

$$\frac{3}{17}\operatorname{tang} x = -\frac{1}{3}\operatorname{tang} y = -\frac{3}{2}\operatorname{tang} z;$$

les équations binômes sont traitées avec l'étendue que comporte le sujet. On donne l'inscription *géométrique* des huit polygones réguliers de dix-sept côtés (p. 186), avec figure intercalée.

Les deux trigonométries sont développées avec le même soin que les fonctions circulaires; les exercices numériques abondent; parmi les quatre-vingt-treize exercices qui terminent l'ouvrage, il y en a de curieux, de nouveaux et tous très-utiles; nous y puiserons quelquefois.

Il y a quelques démonstrations *puritaines*. Il est toujours convenable d'avoir confiance dans l'intelligence du lecteur.

Il aurait été à desirer que l'auteur, à l'instar de Ca-

gnoli, eût indiqué les relations *différentielles* des éléments des triangles, *indispensables* pour les praticiens. La résolution trigonométrique de l'équation du 4e degré aurait dû suivre celle du 3e degré. En tête de tout ouvrage de mathématiques, on devrait trouver l'explication des *notations* employées par l'auteur. Cela faciliterait l'intelligence de la matière et économiserait le temps.

Nous croyons donner une idée exacte de cette production, en la définissant une Encyclopédie trigonométrique.

SUR LA RECTIFICATION DE LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON;

PAR M. PROUHET.

La rectification de la méthode de Newton, ordinairement attribuée à Fourier, se trouve dans un ouvrage publié en 1770, sous ce titre : *Traité de la résolution des équations invariables;* par M. J.-R. Mouraille, de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Marseille. Paris et Toulouse, 1770; in-4° de XXXII — 446 pages, 17 planches.

L'auteur nomme *invariables* les équations algébriques, pour les distinguer des équations différentielles, dont il devait traiter dans un second volume qui n'a jamais paru. Il donne l'interprétation géométrique de la méthode de Newton, et il examine dans le plus grand détail (p. 329 à 361, fig. 41 à 52) toutes les particularités que peut présenter une courbe du genre parabolique, dans les environs du point où elle rencontre l'axe des x. Il indique

ensuite entre quelles limites la méthode de Newton est applicable; quels sont les cas où il faut partir d'une valeur approchée par défaut, et ceux où la première valeur substituée doit être approchée par excès.

La méthode de Newton consiste à réduire l'équation

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots = 0$$

à ses deux premiers termes. En conservant le troisième, aurait-on une valeur plus approchée? Quelques auteurs l'ont pensé; mais M. Mouraille fait voir qu'il n'en est pas toujours ainsi, et qu'on pourrait s'éloigner de la racine cherchée.

L'ouvrage de Mouraille paraît n'avoir point attiré l'attention des géomètres à l'époque où il a été publié, et il est tombé aujourd'hui dans un oubli complet, qu'il ne mérite pas cependant, d'après ce que nous venons de dire. Toutefois il est bon d'ajouter que c'est un peu la faute de l'auteur. Son style est diffus, ses démonstrations souvent peu rigoureuses, et il affiche, à propos de l'infini, une métaphysique capable d'effaroucher beaucoup de lecteurs. Ce mauvais voisinage a fait tort à quelques idées neuves et ingénieuses que renfermait le *Traité de la résolution des équations invariables*.

GERGONNE.

Le fondateur du journalisme mathématique en France; le propagateur des doctrines dualistes, qui, perfectionnées et généralisées, ont doublé l'empire géométrique: le philosophe pénétrant qui, sur toute matière, a appliqué une dialectique serrée, d'une touche vigoureuse.

d'une éloquence spirituellement colorée; le logicien sévère, inexorable, concis et ennemi de cette métaphysique verbeuse qui s'agite indéfiniment, sans jamais se lasser, parce qu'elle marche dans le vide, sans obstacle possible; le professeur pontife, élevant l'enseignement à la hauteur d'un sacerdoce, pour lequel la chaire est devenue l'autel de la vérité, proclamant comme but essentiel *la science*, et non pas seulement les intérêts matériels qu'imposent malheureusement les nécessités de la vie terrestre; l'administrateur intelligent, intègre, ayant le courage, plus rare que l'intrépidité militaire, le courage de résister aux séductions du pouvoir, de ne jamais faire plier le bon droit et la justice selon le bon plaisir des supérieurs, et de ne jamais préconiser, formuler un optimisme banal, conforme au système du jour : Gergonne n'existe plus. Nous essayerons d'esquisser une carrière qu'une Providence bienfaisante a rendue longue d'années, féconde en résultats. La multitude naît, grandit, respire, se nourrit, décline et meurt tout entière; celui-là seul a vécu, qui peut se présenter avec assurance devant le souverain juge d'en haut, et lui dire : J'ai rempli ta mission; *præcepta tua observavi;* celui-là seul a vécu, qui, animé du feu sacré, a voué ses jours et toutes ses facultés au perfectionnement de l'être moral que l'Écriture Sainte représente comme type de l'Esprit divin.

Nous attendons quelques renseignements pour tracer un tableau fidèle des travaux du géomètre, des mérites littéraires de l'écrivain, des talents du professeur, enfin du caractère de l'homme avec ses qualités et ses aspérités. *Sit terra ei levis*.

SUR L'INVENTION DES EXPOSANTS FRACTIONNAIRES OU INCOMMENSURABLES;

PAR M. PROUHET.

Les exposants fractionnaires ont commencé à être en usage dans la seconde moitié du XVIIe siècle, et leur invention est ordinairement attribuée à Wallis. Cependant cette notation avait déjà été proposée, sinon employée, par Simon Stevin, qui, en faisant une découverte supérieure à son époque, et que lui-même regardait comme prématurée, s'est trouvé en avance de près d'un siècle sur le progrès naturel de la science. Nous disons progrès naturel, car la considération des exposants de nature quelconque ne pouvait être de quelque utilité qu'après la découverte des séries infinies et au moment où la représentation, due à Descartes, des grandeurs qui varient d'une manière continue, conduisait à introduire la continuité dans les symboles analytiques.

Il est arrivé trop souvent qu'en voyant dans un auteur le germe d'une découverte amenée plus tard à sa maturité, on lui en a attribué tout l'honneur. Une heureuse rencontre, dont le prix est ignoré de celui qui l'a faite, ne doit pas cependant être confondue avec une invention véritable. Pour montrer que Stevin a bien réellement inventé les exposants fractionnaires, et même, ce qui est plus remarquable encore, les exposants incommensurables, nous citerons ses propres paroles, après avoir donné quelques explications sur les notations qu'il emploie.

Stevin (*) désigne l'inconnue d'un problème par le

(*) L'ARITHMETIQUE DE SIMON STEVIN DE BRUGES contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires : aussi l'Algebre, avec les

signe ①, et les puissances de cette inconnue par ②, ③, etc. Le caractère ⓪ représente une grandeur connue, mais dont la valeur n'est pas assignée. Stevin nous apprend qu'il emprunte ces notations, ⓪ excepté, à Rafael Bombelli (*). Il les préfère, pour « leur convenable et naturel ordre », aux caractères bizarres employés par les algébristes de son temps (**). On voit que les chiffres écrits en cercle sont de véritables exposants. Stevin les appelle *dénominateurs* des dignités ou puissances.

Quand un problème renferme deux inconnues, la seconde est appelée une *quantité post-posée*, et désignée par sec ①; ses puissances sont représentées par sec ②, sec ③, etc. Une troisième inconnue sera représentée par ter ①, ter ②, etc., et ainsi de suite. Les six théorèmes empruntés par Albert Girard à Stevin, qui lui-même les avait pris à Cardan, et dont M. Terquem (***) déclare n'avoir pu trouver le sens, n'ayant pas l'ouvrage de Stevin sous les yeux, sont des théorèmes relatifs à l'élimination d'une inconnue entre deux équations.

équations de cinc quantitez ensemble les quatre premiers livres d'Algebre de Diophante d'Alexandrie maintenant premièrement traduicts en françois. Encore un livre particulier de la pratique d'Arithmetique contenant entre autres les tables d'interests, la disme et un traicté des incommensurables grandeurs: avec l'explication du dixiesme livre d'Euclide. A Leyde, de l'imprimerie de Christoffe Plantin. CIↃ IↃ LXXXV. In-8 de XVI-656 pages, plus 214 pages pour l'appendice.

(*) *Histoire des Mathématiques en Italie*, t. III, p. 363. Les puissances de l'inconnue sont désignées par $\underset{\smile}{1}$ $\underset{\smile}{2}$ etc.

(**) *Algèbre de Clavius*, Rome, 1608. Clavius s'excuse de ne pas employer les chiffres pour désigner les puissances, sur ce qu'il y aurait confusion entre ces chiffres et ceux qui représentent des grandeurs. Le cercle de Stevin remédiait à cet inconvénient.

(***) Analyse de l'invention nouvelle en Algèbre, *Bulletin de Bibliographie, etc.*, t. I, p. 145.

(Extrait de l'Arithmétique de Stevin, p. 18.)

Que les dignitez ou denominateurs des quantitez ***ne sont pas necessairement nombres entiers, mais potentiellement nombres rompuz et nombres radicaux quelconques.***

Il est assez notoire à ceux qui s'exercent en computations algebraiques (car c'est à eux que nous parlons ici), que quand il y a à extraire racine quarrée de ①, ou de ③, ou bien racine cubique de ② et de semblables, qu'il faut dire, que c'est racine d'autant. Par exemple racine quarrée de 4 ① se dit √4 ①, la raison est, qu'il n'y a en use aucunes algebraiques quantitez qui pourroient autrement signifier telles racines. Toutesfois le $\frac{1}{2}$ en circle seroit le charactere de racine de ①, parce que le mesme (suivant la reigle de multiplication des autres quantitez) multiplié en soi donne produict ①, et par conséquent $\frac{3}{2}$ en un circle serait le charactere de racine quarrée de ③, par ce que telle $\frac{3}{2}$ en circle multipliée en soi donne produict ③, et ainsi des autres; de sorte que par tel moien on pourroit de toutes simples quantitez extraire especes de racines quelconques, comme racine cubique de ② serait $\frac{2}{3}$ en circle, etc.

Or par la consideration de ces choses nous est devenu manifeste ce qui au paravant nous estoit plus obscur, à sçavoir que la prime quantité, laquelle les algebraiciens usent pour l'inferieure ne l'est pas, consideré ce qui consiste potentiellement en eux : mais comme il y a un infini maieur progres des quantitez depuis l'unité, ou de

la prime quantité en ascendant, comme ① ② ③, etc., ainsi il y a semblable infini moindre progres de la prime quantité en descendant, qui se pourroit signifier par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en circles, et si pourroit on par les mesmes proceder comme par denominateurs entiers.

Or si l'usage de telles quantitez pouvoit avancer en la reigle de trois algebraique (vulgairement dicte equation) à sçavoir que par icelles un sceust venir au dessus des quantitez ④ ③ ② ① ⓪ de lois de Ferrare (*) (ce qu'avons tenté, mais combien qu'ainsi je pouvois extraire racines de toutes quantitez, toutefois n'y avons peu avenir, comme à son lieu en dirons plus amplement) certes leur usage seroit par raison à conceder (**). Mais n'estant cela pour l'heure pas ainsi, userons seulement les vulgaires entieres, d'autant plus que toutes computations se peuvent achever sans icelles. Car à la fin autant faisons par racine de 4 ①, comme par 2 mis devant $\frac{1}{2}$ en circle. Tellement que par ce discours avons voulu manifester ce qui consiste potentiellement en la matiere, à fin que par ainsi rendissions le subject plus notoire. Il pourroit aussi avenir que ceste souvenance causeroit à un autre quelque avancement

On voit que Stevin concevait très-nettement les exposants des puissances comme formant deux suites infinies, partant de l'unité et comprenant tous les nombres, entiers, fractionnaires, incommensurables (nombres radi-

---

(*) C'est-à-dire aller au delà de la résolution des équations du quatrième degré donnée par Louis Ferrari.

(**) La notation de Stevin a été adoptée par son disciple Albert Girard. *Voyez* l'article déjà cité de M. Terquem, p. 137.

caux quelconques). C'est là une idée bien remarquable, et qui doit faire considérer le géomètre de Bruges comme un des principaux promoteurs de l'algèbre (*).

NOTE

Historique supplémentaire sur le calcul de π

(voir t. XIV, p. 210).

Ouvrages où l'on trouve ces calculs.

— 250. ARCHIMÈDE. — *De dimensione circuli.*

1464. REGIOMONTANUS. — *De quadratura circuli adversus Nic. de Cusa* (calculé avec 3 décimales).

1586. RHETICUS. — *Canon doctrinæ triangulorum.*

1597. ADRIEN METIUS. — *Manuale geometriæ practicæ.* Lug.-Batav.

1579. VIETE. — *Canon mathematicus.* Parisiis.

1597. ADRIAN ROMANUS. — *In Archimedis circul. dimens.* Wurceburgi (112 pages).

1615. LUDOVIC VAN CEULEN. — *De circulo et adscriptis.* Edit. Snellio. Ludg.-Batav.

7621. WILL. SNELLIUS. — *Cyclometricus de circ. dimensione* (calculé avec 34 décimales).

1717. ABR. SHARP. — *Philomath. geometry improved.* London.

(*) Klugel, *Mathematische Worterbuch*, art. *Algebra,* attribue même les exposants négatifs à Stevin. C'est probablement une faute d'impression, puisqu'à l'article *Potenz* on ne parle que des exposants fractionnaires, comme dus à cet auteur.

1706. Machin. — *Jones's synopsis Palinariorum matheseos, or a new introduction to the mathematics.* London, in-8.

1719. De Lagny. — *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris,* p. 155.

1790. De Vega. — *N. Act. Peters.,* t. IX, Hist., p. 41.

1842. Rutherford. — *Phil. Trans.,* 1841, P. 2, p. 283.

..... Anonyme. *Manuscrit de la bibliothèque Radcliffe à Oxford.*

1844. Dahse. — *Journal de Crelle,* t. XXVII, p. 198.

..... Clausen. — *Astron. Nachr.,* n° 184.

1853. Shanks. — *Proceedings, R. Society,* jan. 20, p. 273.

1853. Richter. — *Grunert Archiv.,* t. XXI, p. 119.

1854. Richter. — *Grunert Archiv.,* t. XXII, p. 473, et t. XXIII, p. 476.

1853. Rutherford. — *Proceedings, R. Society,* jan. 20. p. 273.

1855. Richter. — *Grunert Archiv.,* t. XXV, p. 472.

1853. Shanks. — *Proceedings, R. Society,* jan. 20, p. 273.

(Extrait de l'ouvrage : *Tables d'intégrales,* par Bierens de Hann.)

Abr. Sharp, né en 1651, à Little-Horton (Yorkshire), près Bradford, d'une famille considérée, fut placé comme apprenti chez un marchand de Manchester, mais il abandonna bientôt le commerce pour se livrer aux sciences

exactes, et établit une école à Liverpool. Il entra ensuite comme teneur de livres chez un négociant uniquement pour être près de Flamsteed qui demeurait alors chez ce négociant; de là une liaison qui ne finit qu'avec la mort du célèbre astronome. Nommé en 1688 *assistent* à l'observatoire de Greenwich, il se livra à des travaux qui minèrent sa santé et l'obligèrent à retourner à Horton au foyer natal. Il y érigea un observatoire et le munit de nombreux instruments, œuvres de ses mains. En 1718, il publia, format in-4, sous le nom de A. S. (lettres initiales) : *Philomath. geometry improved* 1° *by a large and accurate table of segments of circles;* 2° *a concis treatise of Polyedra.*

Les logarithmes de 1 à 100, ensuite les nombres premiers de 101 à 1100 et les vingt nombres compris entre 999990 et 1000010 y sont calculés avec 61 décimales. Les planches, très-belles, ont été dessinées et gravées par lui-même. On conserve aux archives de la Société Royale ses tables de sinus, tangentes ou sécantes, calculées pour chaque seconde de la première minute, et aussi remarquables par leurs qualités calligraphiques.

Le polyèdres réguliers et semi-réguliers sont traités avec beaucoup de développements, encore intéressants de nos jours.

C'est en 1699 qu'il calcula π, comme objet d'amusement, avec 72 décimales.

Cette extrême faculté calculatrice le mit en correspondance avec Flamsteed, Newton, Halley, Wallis, Hodgson, Sherwin et autres savants du temps. Ces lettres, que la famille possède encore, sont d'autant plus intéressantes, que Sharp écrivait en marge le contenu de ses réponses.

Il menait une vie fort singulière, très-retirée, presque solitaire et ne s'est pas marié. Dans sa maison cinq chambres étaient destinées à ses occupations scientifiques, et

il n'était permis même à aucun de ses parents d'y mettre le pied; en fait d'étrangers, un certain mathématicien et un certain pharmacien de l'endroit étaient seuls admis. Quand il voulait les voir, frottant avec une pierre un certain endroit de la façade de sa maison c'était le signal. Chaque dimanche, il allait régulièrement à la chapelle des *Dissenters* à Bradford et tenant une main remplie de demi-pences derrière le dos, les pauvres, sans demander, sans être vus, venaient y puiser. Il observait peu d'ordre dans ses repas. Dans sa chambre de travail, on avait pratiqué une petite ouverture munie d'une tablette mobile, sur laquelle le domestique plaçait son dîner, toujours sans parler, et souvent le soir, le domestique remportait le dîner sans que Sharp y eût touché, ne voulant pas interrompre un travail commencé. Malgré ce régime et avec une santé débile, il atteignit l'âge de 91 ans et mourut le 18 juillet 1742. Il est le grand-oncle du célèbre artiste Ramsden.

Nouvel argument en faveur de la théorie *macrobiotique* de Cornaro et de M. Flourens. Le travail intellectuel, loin de nuire, contribue à la longévité; mais avec la condition *indispensable* de la *sobriété en toutes choses*. Sinon, non. On allonge aussi la vie, en adoptant la maxime de Leibnitz :

Pars vitæ, quoties hora perditur, perit.

LETTRE AUTOGRAPHE DE LEGENDRE.

M. Asher, libraire à Berlin, possède des autographes de tous les géomètres qui ont été en relation avec Crelle, rédacteur de l'immortel journal, c'est-à-dire des *Dii majores* de notre époque. La lettre suivante, signée de notre

illustre analyste, montre que le feu sacré resta chez lui allumé même sous les glaces de l'âge.

« Je vais dans quelques jours entrer dans ma quatre-vingtième année; j'ai déjà vécu près de deux ans de plus que M. de Lagrange qui n'a vécu que soixante-dix-sept ans et soixante-dix-sept jours, et d'un an de plus que M. de Laplace qui a vécu soixante-dix-huit ans moins dix-huit jours; je dois donc compter un à un les jours qu'il plaira à Dieu de m'accorder, et je n'ai pas un moment à perdre pour achever la tâche que j'ai entreprise dans la vue de compléter par un dernier effort mes travaux sur les fonctions elliptiques et sur les transcendantes analogues.... C'est en effet la gloire de M. Abel que je mettrai dans tout son jour, en faisant voir que son théorème généralise à l'infini tous ceux que l'immortel Euler avait découverts sur les fonctions elliptiques. Une nouvelle branche d'analyse, bien plus vaste que celle des fonctions elliptiques, est ouverte par ce théorème admirable. »

Fermat	est mort âgé de	70 ans.
Leibnitz	»	70
Euler	»	76
Lagrange	»	77
Laplace	»	78
Gauss	»	78
Legendre	»	82
Newton	»	85
Gergonne	»	88
Humboldt (A. de)	»	91

Lorsqu'un esprit de haut bord a une fin prématurée, informez-vous du *vitæ curriculum*, et très-souvent vous aurez le mot de l'énigme. Adam a été puni pour avoir voulu cumuler les délices d'Eden et ceux de la science. Il faut opter.

BIBLIOGRAPHIE.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

(voir p. 17).

(T. LVI, 3e cahier, pages 191 à 283.)

Analyse algébrique.

OTTO HESSE (*) (p. 263 à 369). *Sur les théorèmes des fonctions homogènes entières.*

THÉORÈME. *Si le déterminant* (Hessien) *d'une fonction* homogène entière *de* n *variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *s'évanouit* identiquement, *alors, en remplaçant les* x *par des fonctions linéaires en* y, *de la forme*

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + a_3^\varkappa y_3 + \ldots a_n^\varkappa y_n,$$

cn peut trouver pour les constantes a *des valeurs telles, qu'une des* n *variables* y *disparaisse; les* $\varkappa$ *sont des indices.*

Ce théorème, déjà communiqué par l'auteur, t. XLII, p. 119 (Crelle), 1851, est démontré ici d'une manière plus rigoureuse.

Soit u la fonction, on a pour déterminant (Hessien)

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \ldots\ldots u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} \ldots\ldots u_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ u_{n1} & \ldots\ldots\ldots u_{nn} \end{vmatrix} = \Delta:$$

(*) Prononcez la voyelle finale *e*, mais comme *e* dans *ornementation*.

$u_{\varkappa\lambda}$ est la dérivée successive de u par rapport à $x_\varkappa$ et x_λ; et on suppose $\Delta = 0$ *identiquement*. Soit $u_{\varkappa\lambda}$ un des termes de ce déterminant, on a encore ce théorème :

Si, outre l'équation identique $\Delta = 0$, *on a encore* $\frac{d\Delta}{du_{\varkappa\lambda}} = 0$ *identiquement,* $\varkappa$ *et* λ *ayant une valeur déterminée, tous les autres coefficients différentiels de* Δ *par rapport à un de ses termes sont identiquement nuls.*

Autre théorème :

Si $\Delta = 0$ *identiquement, on peut toujours déterminer* n *constantes* a *telles, que l'on ait*

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = 0.$$

Toutes ces démonstrations sont déduites de ces identités connues

$$\Delta = \Delta_{\varkappa_1} u_{\varkappa_1} + \Delta_{\varkappa_2} u_{\varkappa_2} + \ldots + \Delta_{\varkappa_n} u_{\lambda_n},$$

$$0 = \Delta_{\varkappa_1} u_{\lambda_1} + \Delta_{\varkappa_2} u_{\lambda_2} + \ldots + \Delta_{\varkappa_n} u_{\lambda_n},$$

$$\Delta_{\varkappa\rho} = \frac{d\Delta}{du_{\varkappa\rho}}.$$

Arithmologie.

E.-E. Kummer (p. 270 à 279). *Sur les propositions complémentaires aux lois générales de réciprocité.*

C'est la suite d'un Mémoire inséré t. XLIV, p. 93. On en rendra compte simultanément.

Géométrie.

F. Joachimsthal, à Breslau (p. 280 à 284). *Sur un théorème de la Géométrie analytique élémentaire.*

1. Théorème I. u, v *sont les deux distances d'un point* O *à deux droites* M *et* N; $f(u, v) = 0$ *l'équation*

d'une ligne, si l'on porte respectivement sur u *et sur* v *des longueurs (ayant égard aux signes) proportionnelles* $\frac{df}{du}$ et $\frac{df}{dv}$, *la diagonale du parallélogramme construit sur ces côtés est la normale en* O *de la courbe* $f(u, v) = 0$.

Théorème II. u, v *les deux distances respectives du point* O *à deux points fixes* m *et* n; *et* $f(u, v) = 0$ *équation d'une ligne; même construction et même conclusion.*

Théorème III. u *distance du point* O *au point* m; v *distance du point* O *à la droite* M; $f(u, v) = 0$ *équation d'une ligne; même construction et même conclusion.*

La démonstration repose intuitivement sur des principes de statique et aussi sur le calcul, en passant de chacun des trois systèmes de coordonnées à un système de coordonnées rectangulaires. Dans chacun l'équation de la normale est

$$\frac{X - x}{\frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx}} = \frac{Y - y}{\frac{df}{du}\frac{du}{dy} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dy}};$$

mais aussi dans chacun des trois systèmes

$$\frac{du}{dx} = -\cos(u, x), \quad \frac{du}{dy} = -\cos(u, y);$$

$$\frac{dv}{dx} = \cos(v, x), \quad \frac{dv}{dy} = \cos(v, y);$$

donc l'équation de la normale devient

$$\frac{X - x}{\frac{df}{du}\cos(u, x) + \frac{df}{dv}\cos(v, x)} = \frac{Y - y}{\frac{df}{du}\cos(u, y) + \frac{df}{dv}\cos(v, y)},$$

ce qui fournit l'énoncé du théorème.

La généralisation du théorème dépend de l'intégration de l'équation

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 1.$$

2. Soient donnés dans le même plan une courbe et quatre points fixes A, B, a, b; O étant un point de la courbe, construisons un triangle oab, tel qu'on ait

$$oa = \mathrm{OA}, \quad ob = \mathrm{OB};$$

les points o seront sur une seconde courbe; menons par O une normale NON à la première courbe, et par o une normale on à la seconde courbe; on aura

$$\frac{\sin \mathrm{AON}}{\sin \mathrm{BON}} = \frac{\sin aon}{\sin bon};$$

car l'équation de la normale est indépendante des deux points fixes (§ 1); même conclusion lorsqu'on prend deux droites fixes ou bien un point et une droite fixe.

3. L'équation

$$f(u, v) = 0$$

représente trois courbes différentes dans les trois systèmes des coordonnées; si O est un point commun à deux de ces systèmes, et si ces coordonnées u, v sont *identiques* dans les deux systèmes, les deux courbes auront au point O mêmes normales, et par conséquent mêmes tangentes. Voici quelques applications de ce théorème.

4. Soient AM, AN deux droites fixes; Om (u), On (v) deux perpendiculaires abaissées du point O sur les droites AM, AN; si l'on a l'équation

$$u - \alpha v = 0,$$

alors :

1°. Dans le premier système des coordonnées, cette équation est celle de la droite OA.

2°. Dans le troisième système, m étant un point fixe, cette équation est celle d'une conique ayant m pour foyer et AN pour directrice; la droite OA est alors tangente à la conique; par conséquent, les tangentes menées par les extrémités d'une droite focale rencontrent les directrices au même point A, et la droite qui joint ce point A au foyer est perpendiculaire sur la corde focale.

3°. Dans le second système (th. II), m et n étant des points fixes, l'équation

$$u - \alpha v = 0$$

est celle d'un cercle passant par O et par les points où les bissectrices de l'angle mOn et de son supplément rencontrent la droite mn; et OA est une tangente au cercle.

5. Si dans les figures précédentes on a

$$Om.On = \beta,$$

alors, dans le premier système, cette équation est celle d'une hyperbole ayant OM, ON pour asymptotes. Dans le deuxième système, m et n étant des points fixes, cette équation est celle d'une lemniscate touchant l'hyperbole en O. Or O est le milieu de la partie de la tangente à l'hyperbole interceptée entre les deux asymptotes M et N; donc la même propriété a lieu pour la lemniscate. De semblables constructions et théorèmes ont lieu pour toutes les courbes qui sont représentées dans les trois systèmes par l'équation

$$(u - \alpha)(u - \beta) = v.$$

6. Soient A le centre d'une conique; M et N deux diamètres conjugués $2\sqrt{\alpha}$ et $2\sqrt{\beta}$. L'équation

$$(a) \qquad \frac{u^2}{\beta} + \frac{v^2}{\alpha} = \sin^2(M, N)$$

représente l'équation de cette conique dans le premier système; si m et n sont considérés comme points fixes, la même équation représente, dans le deuxième système, un cercle qui a pour centre le centre de gravité de deux poids proportionnels α et β placés respectivement en m et en n; mais, la conique et le cercle se touchant en O, on a donc ce théorème :

Si du point O *d'une conique on abaisse des perpendiculaires* Om, On *sur deux diamètres conjugués* $2\sqrt{\alpha}$, $2\sqrt{\beta}$, *la normale en* O *rencontre la droite* mn *en un point qui est le centre de gravité de deux poids* α *et* β *placés en* m *et* n.

Dans le cercle, cette normale passe par le milieu de mn, et dans l'hyperbole équilatère la normale est parallèle à mn.

Un théorème analogue a lieu pour les surfaces du second ordre; alors il faut placer aux pieds des perpendiculaires comme poids proportionnels les carrés des aires des parallélogrammes formés par les deux diamètres conjugués qui sont dans le plan sur lequel on a abaissé les perpendiculaires.

O. Hermes (p. 204 à 217). *Extension des propriétés du quadrilatère plan aux tétraèdres, pentaèdres et hexaèdres.*

Démontré à l'aide des coordonnées trilitères et quadrilitères.

On donnera ces propriétés dans le journal.

O. Hermes (p. 218 à 246). *Sur des tétraèdres homologues.*

Extension du théorème Poncelet; sera donné dans le journal.

Calcul infinitésimal.

LIPSCHITZ (R.), de Bonn (p. 189 à 196). *Sur l'intégrale de l'équation différentielle* $\frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dI}{dx} + I = 0$.

On rencontre cette équation dans le mouvement de la chaleur dans un cylindre infini. Elle a été étudiée par FOURIER, *Théorie analytique de la Chaleur*, ch. VI, p. 369;

POISSON, *Journal de l'École Polytechnique*, cah. XIX, p. 349.

BESSEL, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1825. (Recherche sur la partie des perturbations planétaires dépendant des mouvements du Soleil.)

On possède une intégrale *particulière*, représentée par la série infinie convergente

$$I(x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{x^2}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2.4.6}\right)^3 + \ldots,$$

et encore par l'intégrale définie

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Poisson démontre que pour des valeurs croissantes de x la fonction $I(x)$ s'approche de plus en plus de

$$\frac{1}{\pi}\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{x}},$$

et donne pour des valeurs très-grandes de x une série semi-convergente.

Le but du Mémoire de M. Lipschitz est de montrer de nouvelles relations entre la fonction $I(x)$ et les fonctions trigonométriques, et de donner une nouvelle série semi-convergente.

Ainsi il trouve

$$\int_0^\infty e^{-bx}\,\text{I}\,(ax)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \text{I}\,(ax)\,dx = \frac{1}{a},$$

équation analogue à celle-ci :

$$\int_0^\infty e^{-bx}(\cos ax + i \sin ax)\,dx = \frac{b+ai}{b^2+a^2},$$

et

$$\int_0^\infty x^{m-1}\,\text{I}\,(ax)\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma\frac{1}{2}(m-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\sin m\pi\,\frac{1}{a^m},$$

analogue à celle-ci :

$$\int_0^\infty x^{m-1}(\cos ax + i \sin ax)\,dx = \frac{\Gamma(m)}{a^m}\left(\cos\frac{m\pi}{2} + i\sin\frac{m\pi}{2}\right),$$

ou

$$0 < m < 1.$$

Les séries semi-convergentes se déduisent de ces théorèmes, et l'auteur fait usage de la construction géométrique des quantités complexes $x + iy$.

O. Röthig (p. 197 à 203). *Sur quelques espèces d'intégrales elliptiques.*

1. Soit

$$(1) \qquad \int \frac{f(x)\,dx}{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)^{\frac{m}{3}}};$$

$f(x)$ fonction rationnelle.

Au cas où $m = 1$ ou $m = 2$, Legendre a examiné quelques cas particuliers (*Fonctions elliptiques*, ch. XXVII, XXVIII et XXXII); de même MM. Mindig et Richelot (Journal de Crelle, t. IX, p. 295 à 407); M. Röthig

par diverses transformations ramène pour m quelconque l'intégrale à la fonction elliptique

$$\int \frac{f(v)\,dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-c^2v^2)}}; \quad c = \frac{1}{2}\sqrt{2+\varepsilon\sqrt{3}}; \quad \varepsilon = \pm 1.$$

2. Soit

$$(2) \qquad \int \frac{f(x)\,dx}{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)^{\frac{m}{4}}},$$

$f(x)$ fonction rationnelle.

Legendre discute quelques cas spéciaux lorsque $m = 1$ et $m = 3$ (*Fonctions elliptiques*, ch. XXXII); M. Röthig ramène l'intégrale pour le cas général à la fonction elliptique

$$\int \frac{f(v)\,dv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}v^2}},$$

et aussi dans les deux cas lorsque $a_3 = 0$.

SUR LE THÉORÈME DE TINSEAU;

PAR M. PROUHET.

Ce théorème consiste en ce que le carré d'une aire plane est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires coordonnés. On le trouve pour la première fois dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1774 et imprimé en 1780 dans le tome IX des *Savants étrangers*, Mémoire dont l'auteur est Tinseau, correspondant de l'Académie, officier au corps royal du génie.

On déduit du théorème de Tinseau que le carré de la face hypoténuse d'un tétraèdre trirectangle est égal à la somme des carrés des trois autres faces. Ce corollaire est démontré directement dans les Mémoires de 1783, par de Gua, qui assure avoir communiqué cette proposition à l'Académie plus de vingt ans avant la présentation du théorème de Tinseau. Rien ne porte à soupçonner la bonne foi de de Gua, mais on doit remarquer que sa réclamation porte sur le corollaire et non sur le théorème principal auquel il ne paraît pas avoir songé : ensuite, que les séances de l'Académie n'étant pas publiques à cette époque, l'honneur de la découverte doit demeurer tout entier à Tinseau, qui ne pouvait pas avoir connaissance du travail de de Gua.

Un fait curieux et qui mérite d'être signalé, c'est que Descartes connaissait le théorème cité plus haut et relatif au tétraèdre trirectangle. L'illustre philosophe avait rencontré ce théorème et plusieurs autres, en composant une sorte de tétraédrométrie dont quelques fragments, restés inédits jusqu'à ce jour, viennent d'être publiés par M. Foucher de Careil. *Voir* les *Œuvres inédites de Descartes,* Paris, 1859, in-8, ouvrage intéressant et sur lequel nous reviendrons.

Note du Rédacteur. Tinseau de Gennes (Charles-Marie-Thérèse), sorti de l'école de Mézières en 1771, s'est retiré du service en 1791 ; il était de Besançon. Son fils, élève de l'École Polytechnique, a servi aussi dans le génie. Retiré en 1815 pour opinion politique. (*Voir* l'article du père dans la Biographie Michaud.) Une branche de cette famille habite Metz.

Gudermann a étendu le théorème pythagoricien au triangle sphérique (*Nouvelles Annales,* t. XI, p. 409. 1852).

NOTE
Sur plusieurs écrits relatifs au comte Jacques Riccati;

PAR LE PRINCE BALD. BONCOMPAGNI.

Dans le volume intitulé : *Memorie per servire all' istoria letteraria, tomo III, parte V, per il mese di maggio* 1754. *In Venezia, appresso Pietro Valvasense*, MDCCLIV. *Con licenza de' superiori e privilegio*. P. 33 36, art. xx, on lit une lettre en date de *Trivigi*, 11 *maggio* 1754, dans laquelle on trouve : 1° (p. 33-41) des renseignements sur la vie du comte Jacopo Riccati ; 2° (p. 41-43) un catalogue des ouvrages manuscrits du comte Jacopo Riccati ; 3° (p. 43 et 44) un catalogue de ses ouvrages latins ; 4° (p. 44-46) un catalogue de ses ouvrages en langue italienne imprimés.

Ce volume fait partie d'un recueil intitulé : *Memorie per servire all' istoria letteraria. In Venezia, appresso Pietro Valvasense*. MDCCLIII-MDCCLVIII. Ce recueil est composé de 12 tomes in-8°, dont les huit premiers sont divisés chacun en six parties.

Dans le volume intitulé : *Storia letteraria d'Italia sotto la protezione del serenissimo Francesco III, duca di Modena, ec., ec., volume IX. Dal Gennajo* MDCCLVI, *a tutto jiugno dell' anno medesimo. In Modena*, MDCCLVI. *A spese Remondini. Con licenza de' superiori e privilegio*. P. 513, lig. 10 ; p. 518, lig. 40 ; libro III, capo V, § VI-IX, on trouve un éloge du comte Jacopo Riccati.

Dans le même volume (p. 519, lig. 1 ; p. 523, lig. 8) on trouve un catalogue des ouvrages inédits et imprimés du comte Jacopo Riccati.

Ce volume est le neuvième volume d'un ouvrage anonyme du Père François-Antoine Zaccaria, de la Compagnie de Jésus, intitulé : *Storia letteraria d'Italia. In Venezia. — In Modena* MDCCL-MDCCLVI: En 9 volumes in-8°.

Dans le volume intitulé : *Nuovo Dizionario Istorico, ovvero Storia in compendio di tutti gli uomini che si sono resi illustri, ec., dal principio del mondo fino ai nostri giorni, con tavole cronologiche; composto da una Società di letterati in Francia, accresciuto in occasione di più edizioni da altre Società letterarie in Alemagna, ne' Paesi-Bassi, e Italia. Sulla settima edizione francese del* 1789, *tradotto in italiano. Tomo XVII. Bassano,* MDCCXCVI. *A spese Remôndini di Venezia. Con licenza de' superiori e privilegio.* P. 14, col. 1, lig. 14; p. 15, col. 1, lig. 26; on trouve un article sur le comte Jacopo Riccati, qui commence : « I. RICCATI (conte *Jacopo*), » et finit : « (*ved.* RAMPINELLI P. D. *Ramiro*). »

Ce volume est le XVIIe d'une édition en 22 volumes in-8°, intitulée : *Nuovo Dizionario Istorico, ovvero Storia in compendio di tutti gli uomini che si sono resi illustri, ec., dal principio del mondo fino ai nostri giorni, con tavole cronologiche; composto da una Società di letterati in Francia, accresciuto in occasione di più edizioni di altre Società letterarie in Alemagna, ne' Paesi-Bassi, e in Italia. Sulla settima edizione francese del* 1789, *tradotto in italiano. Bassano,* MDCCXCVI. *A spese Remondini di Venezia. Con licenza de' superiori e privilegio.*

Dans le volume intitulé : *Vitæ Italorum doctrina excellentium qui sæculis* XVII *et* XVIII *floruerunt. Volumen XVI, auctore Angelo Fabronio, Academiæ Pisanæ curatore. Pisis* MDCXCV. *Apud Alexandrum Landi, superioribus annuentibus.* P. 336-392, on trouve

un article intitulé : « DE TRIBUS RICCATIS (JACOBO » PATRE, VINCENTIO et JORDANO FILIIS). » Dans les p. 330, lig. 4, —335, lig. 3, de ce volume, on trouve la vie du comte Jacopo Riccati.

Ce volume est le XVIe d'un recueil en 20 volumes in-8°, intitulé : *Vitæ Italorum doctrina excellentium qui sæculis* XVII *et* XVIII *floruerunt. Auctore Angelo Fabronio, Academiæ Pisanæ curatore. Pisis* MDCCLXXVIII, *Lucæ* MDCCCX.

Dans le volume intitulé : *Storia della Letteratura italiana nel secolo* XVIII, *scritta da Antonio Lombardi, primo bibliotecario di sua Altezza Reale il sig. Duca di Modena, socio e secretario della Società italiana delle Scienze. Tomo I, Modena, presso la tipografia camerale,* MDCCCXXVII. P. 366, lig. 29, p. 368, lig. 12; libro II, capo II, § LII), on trouve des renseignements sur la vie et les écrits du comte Jacopo Riccati.

Ce volume est le Ier d'une édition intitulée : *Storia della Letteratura italiana nel secolo XVIII, scritta da Antonio Lombardi, primo bibliotecario di sua Altezza Reale il sig. Duca di Modena, socio e segretario della Società italiana delle Scienze. Modena, presso la tipografia camerale,* MDCCCXXVI-MDCCCXXX. Quatre volumes in-8°.

Ces mêmes renseignements se trouvent dans le volume intitulé : *Storia della Letteratura italiana nel secolo XVIII, scritta da Antonio Lombardi, primo bibliotecario di S. A. R. il Duca di Modena, socio e segretario della Società italiana delle Scienze. Tomo II. In Venezia, co' tipi di Francesco Andreola.* 1832.

Ce volume est le second de l'édition intitulée : *Storia della Letteratura italiana nel secolo XVIII, scritta da Antonio Lombardi, primo bibliotecario di S. A. R. il*

Duca di Modena, socio e segretario della Società italiana delle Scienze. In Venezia, co' tipi di Francesco Andreola. 1832. Six tomes in-12.

Dans chacun des écrits cités ci-dessus, on lit que le comte Jacopo Riccati est né à Venise le 28 mai 1676, et mort à Trévise (*Trevigi*) le 15 avril de l'année 1784.

Dans le volume intitulé : *Bibliographie biographique universelle. Dictionnaire des ouvrages relatifs à l'histoire de la vie publique et privée des personnages célèbres de tous les temps et de toutes les nations, depuis le commencement du monde jusqu'à nos jours. Enrichi du répertoire des bio-bibliographies générales, nationales et spéciales. Par Édouard-Marie Œttinger. Tome II,* N—Z (27391-45666). *Bruxelles. J.-J. Stienon, imprimeur-éditeur, faubourg de Louvain,* 19.1854 (col. 1520), on lit :

« RICCATI (il conte *Jacopo*),
» naturaliste italien (28 mai 1676-15 avril 1754). »

« MARZARI (*Giovanni-Battista*). Elogio del conte J. Riccati.
» *Trevis*. 1813.4. »

Je n'ai pas vu cet éloge du comte Jacopo Riccati.

Note du Rédacteur. Le célèbre bibliographe-géomètre a publié, en 1857 : 1° le *Liber abbaci di Leonardo Pisano,* in-4° de 457 pages; 2° *Scritti inediti del P. D. Pietro Cossali,* in-4° de 417 pages. Nous espérons entretenir nos lecteurs de ces importantes productions de l'érudition italienne, et je saisis avec empressement l'occasion d'offrir à la Providence des remercîments d'avoir prolongé assez ma carrière pour voir *poindre* le jour si longtemps désiré, le jour d'affranchissement de la patrie de Dante, Galilée, Volta, *scientiarum litterarumque* ΠΟΤΝΙΑ ΜΗΤΗΡ.

SUR LE SYSTÈME DES COORDONNÉES TRILITÈRES ET QUADRILITÈRES.

1. Les fonctions *homogènes* jouissent de propriétés qui facilitent les calculs, et en outre sont de formation symétrique et mnémonique; le système de coordonnées à trois et quatre lettres a l'avantage de rendre les fonctions homogènes : de là l'usage qu'en font beaucoup de géomètres, surtout hors de France, usage qui deviendra général. On en voit une belle application dans le Mémoire de M. Painvin sur les surfaces du second ordre.

Coordonnées trilitères.

2. Soit un triangle plan ABC; désignons par t, u, v les distances respectives d'un point situé dans le plan du triangle, aux côtés BC, CA, AB. Ce point est *déterminé* lorsqu'on donne les rapports de deux de ces trois quantités à la deuxième, par exemple les rapports $\frac{t}{v}$, $\frac{u}{v}$, et l'on dit en ce sens que les trois coordonnées du point sont t, u, v.

φ désignant une fonction connue, $\varphi(t, u, v) = 0$ représente l'équation d'une ligne plane, et la fonction doit être *homogène*, puisqu'elle établit une relation entre les rapports $\frac{t}{v}$, $\frac{u}{v}$.

Les Anglais nomment le triangle des trois axes, le triangle de *référence*, parce qu'on y rapporte les distances des points du plan.

Équation d'une droite. $at + bu + cv = 0$ est l'équation d'une droite; a, b, c sont des constantes.

Deux droites. Le système de deux droites

$$at + bu + cv = 0,$$
$$a_1 t + b_1 u + c_1 v = 0,$$

représente l'équation d'un point, et l'on a

$$t = (bc_1), \quad u = (ca_1), \quad v = (ab_1).$$

3. *Trois droites.*

$$at + bu + cv = 0,$$
$$a_1 t + b_1 u + c_1 v = 0,$$
$$a_2 t + b_2 u + c_2 v = 0;$$

pour que ces trois droites passent par le même point, on doit avoir le déterminant

$$(ab_1 c_2) = 0.$$

4. *Droites passant par les sommets du triangle* ABC.

$at + cv = 0$, équation d'une droite passant par le sommet B,
$bu + cv = 0$, » A,
$at + bu = 0$, » C.

5. *Trois droites passant par les sommets et par le même point.*

$at + cv = 0$, droite passant par B,
$b_1 u + c_1 v = 0$, » A,
$a_2 t + b_2 u = 0$, » C;

lorsqu'on a la relation

$$ac_1 b_2 + cb_1 a_2 = 0,$$

les trois droites passent par le même point;

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{c_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = -1,$$

relation segmentaire.

6. *Transversale.* Soit

$$at + bu + cv = 0,$$

équation d'une transversale; on a

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1,$$

relation segmentaire.

7. *Relation harmonique.* Les quatre droites

$$t = 0, \quad at + bu = 0, \quad at - bu = 0, \quad u = 0,$$

forment un faisceau harmonique dont le sommet est C.

8. *Pôle d'une droite relativement à un triangle.* Soit, comme ci-dessus, le triangle de référence ABC; $au + bt + cv = 0$ l'équation d'une transversale.

$$t = 0, \quad at + bu = 0, \quad at - bu = 0, \quad u = 0,$$

forment un faisceau harmonique passant par C;

$$t = 0, \quad at + cv = 0, \quad at - cv = 0, \quad v = 0,$$

forment un faisceau harmonique passant par B;

$$u = 0, \quad bu + cv = 0, \quad bu - cv = 0, \quad v = 0,$$

forment un faisceau harmonique passant par A.

Les trois droites

$$at - bu = 0, \quad at - cv = 0, \quad bu - cv = 0$$

passent par le même point P (n° 5); ce point P est dit le *pôle* de la transversale relativement au triangle. En considérant le triangle comme une ligne du troisième ordre, le point P est le pôle de la droite, d'après la théorie générale des pôles et polaires de Bobillier.

Le centre de gravité du triangle est le pôle d'une droite située à l'infini.

Les centres des cercles qui touchent les côtés du triangle sont les pôles des quatre droites

$$t \pm u \pm v = 0.$$

O étant le centre du cercle circonscrit, la polaire de ce centre P est

$$t \sin \mathrm{OBC} + u \sin \mathrm{OCA} + v \sin \mathrm{OAB} = 0;$$

$$\mathrm{OBC} + \mathrm{OCA} + \mathrm{OAB} = \frac{\pi}{2}.$$

9. *Droites conjuguées dans le quadrilatère.* A l'aide de coordonnées trilitères, on démontre facilement ce théorème connu :

« Si l'on coupe un quadrilatère complet par une transversale, elle rencontre les trois diagonales en trois points; sur chaque diagonale, on prend le point correspondant harmoniquement au point d'intersection et relativement aux extrémités de la diagonale, on obtient trois points en ligne droite; c'est la droite *conjuguée* à la transversale : lorsque celle-ci se transporte à l'infini, la conjuguée est une droite passant par les milieux des trois diagonales. » On sait que cette dernière propriété est un cas particulier du théorème de Newton, que les centres des coniques inscrits dans un quadrilatère sont sur une même droite.

Coordonnées quadrilatères.

10. Soit un tétraèdre ABCD; désignons par t, u, v, w les distances respectives d'un point aux quatre faces BCD, CDA, DAB, ABC : le point sera déterminé lorsqu'on connaît trois rapports entre ces quatre quantités. Par exemple, $\frac{t}{w}$, $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$; t, u, v, w pris dans ce sens, sont les quatre coordonnées du point.

$\varphi(t, u, v, w) = o$ exprime l'équation d'une surface; équation essentiellement homogène.

ABCD est dit *tétraèdre de référence*.

11. *Équation d'un plan.* $at + bu + cv + dv = o$ est l'équation d'un plan; a, b, c, d quantités constantes.

12. *Équations d'un point.*

$$\left.\begin{array}{l} at + bu + cv + dw = o \\ a_1 t + b_2 u + c_1 v + d_1 w = o \\ a_2 t + b_2 u + c_2 v + d_2 w = o \end{array}\right\} \text{sont quatre équat. d'un point;}$$

on en déduit

$$t = (b c_2 d_1), \quad u = (c d_1 a_2), \quad v = (d a_2 b_1), \quad w = (a b_1 c_2).$$

13. Prenons encore un quatrième plan

$$a_3 t + b_3 u + c_3 v + d_3 w = o;$$

pour que les quatre plans passent par le même point, on doit avoir

$$(a b_1 c_2 d_3) = o:$$

deux de ces plans représentent l'équation d'une droite; ainsi on a la condition pour que deux droites se coupent, et l'on peut prendre arbitrairement deux coefficients dans chacune des deux équations d'une droite.

14. Pour que trois plans passent par la même droite, on doit avoir

$$(a b' c'') = o, \quad (a b_{,} c_{,,}) = o.$$

15. Conditions pour que quatre droites passant par les sommets d'un tétraèdre soient sur le même hyperboloïde. (HERMES.)

Soit ABCD le tétraèdre de référence.

$(g_t) \ldots \frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}}$, équat. d'une droite qui passe par A ;

$(g_u) \ldots \frac{t}{a_{21}} = \frac{v}{a_{23}} = \frac{w}{a_{24}}$, » B;

$(g_v) \ldots \frac{t}{a_{31}} = \frac{v}{a_{32}} = \frac{w}{a_{34}}$, » C;

$(g_w) \ldots \frac{t}{a_{41}} = \frac{u}{a_{42}} = \frac{v}{a_{43}}$, » D.

Soient g_t, g_u, g_v trois génératrices du même système d'un hyperboloïde à une nappe, trouver la relation entre les a pour que la droite g_w soit une génératrice du même système.

Solution. Soit

$$\frac{v}{a_{23}} = \frac{w}{a_{24}},$$

équation d'un plan passant par le sommet A et la droite (g_u);

$$\frac{u}{a_{32}} = \frac{w}{a_{43}},$$

équation d'un plan passant par le sommet A et la droite (g_v);

$$\frac{u}{a_{42}} = \frac{v}{a_{43}},$$

équation d'un plan passant par le sommet A et la droite (g_w).

Ces trois plans doivent se couper suivant une même droite du second système, puisque g_u, g_v, g_w appartiennent au premier système, éléments de l'hyperboloïde ; il faut alors qu'on ait $a_{23} = a_{32}$, $a_{24} = a_{42}$, $a_{34} = a_{43}$, et la droite d'intersection de ces trois plans sera $a_{34}u = a_{24}v = a_{23}w$, droite du second système.

On prouve de la même manière, faisant usage du som-

met B, que l'on doit avoir $a_{31}=a_{13}$, $a_{21}=a_{12}$; la condition générale est donc que l'on doit avoir $a_{ki}=a_{ik}$.

Ainsi, les quatre génératrices du second système sont :

$$a_{34}u = a_{24}v = a_{23}w,$$

$$a_{24}t = a_{14}u = a_{12}w,$$

$$a_{23}t = a_{13}u = a_{12}v,$$

et les quatre droites

$$\frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}}, \text{ passant par le sommet A;}$$

$$\frac{t}{a_{12}} = \frac{v}{a_{23}} = \frac{w}{a_{24}}, \quad \text{»} \quad \text{B;}$$

$$\frac{t}{a_{13}} = \frac{u}{a_{23}} = \frac{w}{a_{34}}, \quad \text{»} \quad \text{C;}$$

$$\frac{t}{a_{14}} = \frac{u}{a_{24}} = \frac{w}{a_{34}}, \quad \text{»} \quad \text{D;}$$

sont sur le même hyperboloïde (Hermes).

Note du Rédacteur. Désignons respectivement par U_a, V_a, W_a les sinus des angles que fait la droite qui passe par A avec les faces u, v, w qui se coupent en A; de même par T_b, V_b, U_b les sinus des angles que fait la droite menée par B avec les faces t, v, u, et ainsi des deux autres.

Lorsqu'on a les six relations suivantes, les quatre droites sont sur le même hyperboloïde; la quatrième droite g_w rencontre les trois premières, et appartient au second système.

En écrivant les échelles

$$\begin{matrix} T, & U, & V, & W \\ a, & b, & c, & d \end{matrix}$$

on voit la loi des indices

$$
\begin{array}{ll}
1 & T_c U_d - T_d U_c = 0, \\
2 & T_b V_d - T_d V_b = 0, \\
3 & T_b W_c - T_c W_b = 0, \\
3 & U_a V_d - U_d V_a = 0, \\
2 & U_a W_c - U_c W_a = 0, \\
1 & V_a W_b - V_b W_a = 0;
\end{array}
$$

car, dans la première droite,

$$\frac{u}{v} = \frac{a_{12}}{a_{13}} = \frac{U_a}{V_a},$$

et dans la dernière,

$$\frac{u}{v} = \frac{a_{24}}{a_{34}} = \frac{U_d}{V_d};$$

donc

$$U_a V_d = U_d V_a,$$

et ainsi des autres.

NOTE HISTORIQUE SUR LES COURBES PLANES.

Euler est le premier qui ait remarqué le paradoxe que deux courbes de degré n peuvent se couper en un plus grand nombre de points qui suffisent pour les déterminer. (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1748.)

La même difficulté a été signalée par Cramer, dans son *Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, 1750; mais les théorèmes géométriques qui dérivent de ce paradoxe n'ont été trouvés que dans le siècle actuel; c'est en 1827. Gergonne a démontré que si parmi les n^2 points d'intersection de deux courbes de degré n, np sont sur une courbe de degré p moindre que n, les $n(n-p)$ res-

tants sont sur une courbe de degré $n - p$. (*Annales*, t. XXVII, p. 220.)

Vers le même temps, Plücker a donné ce théorème :

Toutes les courbes de degré n *qui passent par* $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ *points fixes passent encore par* $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ *autres points fixes*. (*Entwicklungen*, vol. I, p. 228; Gergonne, *Annales*, t. XIX, p. 97, 129.) Quelques années après, ont été discutées les relations entre les points d'intersection des lignes et celles des surfaces de *différents* degrés. Exemples :

Une courbe de degré n *qui passe par* $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ *points d'une courbe de degré* $p < n$, *rencontre encore cette courbe en* $\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ *autres points fixes*. (*Journal de Crelle*, t. XV, p. 285, Jacobi; t. XVI, p. 47, Plucker.)

Enfin, on doit à M. Cayley ce théorème général :

m, n, r *étant trois nombres entiers*, r *supérieur soit à* m *ou soit à* n, *mais inférieur à* $(m+n-3)$; *une courbe de degré* r *qui passe à travers* $\frac{(m+n-r-1)(m+n-r-2)}{1.2}$ *points des* mn *points d'intersection de deux courbes de degré* m *et* n, *passe encore par les autres points d'intersection*. (*Camb. mat. Journal*, vol. III, p. 211.)
(Extrait des *High. planes*, p. 25.)

BIBLIOGRAPHIE.

LEÇONS SUR LES COORDONNÉES CURVILIGNES ET LEURS DIVERSES APPLICATIONS; par M. *G. Lamé*. In-8 avec figures dans le texte; 1859. Prix : 5 francs, chez Mallet-Bachelier, libraire.

Sous ce titre modeste, M. Lamé a réuni les principes d'une analyse toute nouvelle; c'est un horizon immense ouvert aux recherches mathématiques. Comme tous les ouvrages du savant académicien, ce dernier livre se distingue par l'unité des vues, la clarté et l'elégance de l'exposition. Nous ne pouvons donner qu'une idée succincte des matières contenues dans ce volume.

Un point de l'espace peut être regardé comme déterminé par l'intersection de trois surfaces orthogonales; les paramètres de ces surfaces, dites surfaces *conjuguées*, sont les coordonnées curvilignes du point.

Cet ouvrage contient deux grandes divisions, savoir :

1°. La *théorie*, comprenant :

Les formules qui servent à passer des coordonnées *rectilignes* à des coordonnées *curvilignes* quelconques;

Les expressions des courbures des surfaces conjuguées et de leurs intersections;

Enfin les équations aux différences partielles qui régissent les paramètres *différentiels* de ces surfaces.

En supposant l'équation de la surface mise sous la forme

$$\rho = f(x, y, z)$$

(ρ étant une constante arbitraire), on appelle paramètres différentiels du premier et du second ordre les expres-

sions

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)}, \quad \left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}\right).$$

2°. Les *applications*, qui renferment :

La détermination analytique des coordonnées elliptiques ;

La transformation en coordonnées curvilignes du mouvement d'un point matériel ;

Les systèmes cylindriques isothermes et en particulier le système bi-circulaire et le système des lemniscates ;

La transformation des systèmes orthogonaux par rayons vecteurs réciproques ;

Les équations de la théorie mathématique de l'élasticité en coordonnées curvilignes ;

Enfin la solution complète du problème de l'équilibre d'élasticité dans les enveloppes sphériques.

On constate, dans ces applications, les remarquables analogies des lois mathématiques qui régissent : le potentiel, dans la théorie de l'attraction ; la température, dans celle de la chaleur ; la dilatation cubique et les déplacements moléculaires, dans celle de l'élasticité. C'est un rapprochment sur lequel M. Lamé insiste fréquemment. Nous devons en effet espérer que, dans un avenir plus ou moins lointain, on rattachera à une seule et unique loi mathématique les divers phénomènes physiques classés actuellement sous des dénominations différentes.

D'après ce rapide aperçu, on pressent les nombreux résultats dont on dû s'enrichir la physique et la géométrie. Entreprendre une analyse plus complète, serait vouloir reproduire l'ouvrage lui-même.

Nous ne pouvons cependant nous empêcher de signaler deux remarquables exemples d'intégration. Le premier a pour objet la recherche d'un système orthogonal

dont l'ellipsoïde est une des surfaces conjuguées, ce qui conduit aux coordonnées elliptiques. Le second donne la solution générale du problème de l'équilibre d'élasticité dans le cas des enveloppes sphériques. Là tout est nouveau, et l'élégance du calcul ne le cède qu'à la difficulté de la question. Ce sont deux modèles à suivre dans les problèmes de ce genre. Nous devons donc savoir un gré infini à l'auteur d'avoir conservé la méthode d'invention dans l'exposé didactique de ces théories et de leurs applications.

La physique mathématique a été l'origine de la découverte des coordonnées curvilignes; aussi est-ce sur ce terrain que la nouvelle analyse a fait le plus d'explorations. Néanmoins la mécanique, la géométrie ont déjà été puiser à ses formules, et la théorie des coordonnées curvilignes est destinée à prêter les plus grands secours à toutes les branches des mathématiques.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à formuler un désir : c'est de voir la *Théorie de la chaleur* suivre bientôt les *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

L. Painvin.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

(Crelle, t. LVII, 1er cahier, 1859.)

(voir p. 81).

Mécanique.

H. Helmholtz (pages 1-72), à Heidelberg. *Théorie des oscillations de l'air dans des tubes ouverts aux deux bouts.*

La théorie des tuyaux d'orgues a occupé plusieurs géomètres et physiciens. Le premier en date est Daniel Bernoulli (*Acad. des Sciences,* 1762). Viennent ensuite :

Euler (*N. C. A. Peter.*, t. XVI, p. 347; 1772).

Poisson (*Acad. des Sciences*, t. II, p. 305; 1847).

MM. Quet (*Journal de Liouville*, t. XX, p. 1); Duhamel (*ibid.*, t. XVI, p. 49).

Masson (*Ann. de Chimie et de Phys.*, 3e série; t. XL, p. 418).

Wertheim (*ibid.*, 3e série; t. XXXI, p. 428).

Soudhaufs (*Poggendorff's Ann.*, t. LXXXI, p. 347).

Hopkins (*Trans. of the Camb. Philos. Soc.*, vol. V).

Les théoriciens ont recours à diverses hypothèses; par exemple, que les directions des molécules d'air dans l'intérieur du tube sont toutes parallèles à l'axe; que dans chaque section transverse, les molécules aériennes ont même vitesse, supportent la même pression; qu'à l'embouchure la densité est nulle, ou du moins très-petite; qu'à cette embouchure, il y a passage subit d'ondes planes à ondes sphériques; etc., etc. M. Helmholtz abandonne toutes ces hypothèses, et résout le problème uniquement d'après les données mathématiques. A cet effet, il établit deux fonctions : l'une géométrique, relative à la forme du tube, à l'aire de l'embouchure, et l'autre dynamique, relative aux forces qui engendrent les vibrations sonores, et, s'appuyant sur des théorèmes de physique moléculaire, établis par Green (Crelle, t. XLIV, p. 360); il démontre que ces fonctions φ et ψ jouissent des mêmes propriétés que les fonctions *potentielles* dans les théories électriques et magnétiques. Les points attractifs sont remplacés, en acoustique, par des points excitant les vibrations. Il assigne les emplacements des tranches à vitesse *minima* et densité maxima (tranches nodales), et fait entrer dans son calcul la longueur des amplitudes et la durée des phases. Ce qu'il y a de plus remarquable et de plus nouveau, c'est l'état dynamique de la portion du tube qui avoisine l'ouverture et celui de l'air environnant extérieu-

rement, où se propagent les ondes sphériques. Les sons *calculés* s'accordent assez bien avec les sons *expérimentés* par Hopkins, Wertheim et Soudhaufs; l'intégration amène vingt-sept équations principales, dont chacune a des équations corollaires.

Ce Mémoire, sujet d'une belle thèse, serait une excellente importation.

A. Clebsch, de Carlsruhe (p. 73-77). *Théorie des moments d'inertie et du mouvement de rotation autour d'un point.*

Soient Ma^2, Mb^2, Mc^2 les moments d'inertie par rapport aux trois axes principaux passant par le centre de gravité; menant par ce centre une droite faisant avec ces axes les angles α, β, γ, le moment d'inertie par rapport à cette droite sera

$$M(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma);$$

faisons

$$(1) \qquad \rho^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma;$$

par l'extrémité de ρ, menons un plan perpendiculaire à ρ, et ayant pour équation

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1,$$

on a

$$\cos\alpha = -\rho u, \quad \cos\beta = -\rho v, \quad \cos\gamma = -\rho w;$$

donc

$$1 = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2;$$

construisons l'ellipsoïde

$$(2) \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2};$$

on a ce théorème :

La perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur

le plan tangent à cet ellipsoïde, représente le RAYON D'INERTIE *pris par rapport à cette perpendiculaire.*

L'auteur nomme cet ellipsoïde *second ellipsoïde central*, pour le distinguer du premier en usage, dont les demi-diamètres sont proportionnels aux racines carrées de moments d'inertie inverse. Si l'on fait passer un axe par un point (x, y, z), on a pour équation

$$(3) \quad \begin{cases} 1 = (a^2 + r^2)u^2 + (b^2 + r^2)v^2 + (c^2 + r^2)w^2 \\ \quad - (ux + vy + wz)^2, \end{cases}$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et u, v, w ont même signification que dessus. Faisant varier u, v, w, l'équation (3) est celle d'une ellipse qui a pour centre le point x, y, z, et les perpendiculaires abaissées de ce centre sur les plans tangents sont les rayons d'inertie relativement aux divers axes passant par ce centre; pour trouver les axes principaux de cet ellipsoïde, il faut rendre minima

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

ce qui mène à cette équation du troisième degré :

$$(4) \quad 1 = \frac{x^2}{a^2 + r^2 - \rho^2} + \frac{y^2}{b^2 + r^2 - \rho^2} + \frac{z^2}{c^2 + r^2 - \rho^2}.$$

On voit que ce sont les trois surfaces confocales à l'ellipsoïde (2), et les rayons d'inertie *principaux* qui passent par le point x, y, z ont pour direction les normales menées de ce point à ces trois surfaces, et pour valeurs $\sqrt{r^2 + \lambda^2}$, $\sqrt{r^2 + \mu^2}$, $\sqrt{r^2 + \nu^2}$, λ, μ, ν étant les paramètres des trois surfaces confocales.

Lorsque ρ est constant, l'ellipsoïde (4) représente, en optique, les vitesses de propagation des rayons dans les milieux cristallisés.

L'auteur établit encore plusieurs théorèmes intéressants; entre autres ceux-ci :

Les points pour lesquels les moments d'inertie principaux sont égaux, forment la ligne focale sur l'ellipsoïde (z).

Si dans l'ellipsoïde (z) on mène le rayon vecteur qui représente l'axe du couple moyen *der beweugngs grösse*, le plan tangent passant par son extrémité indique le plan de rotation du corps, et la normale passant par cette extrémité est l'axe instantané de rotation; on suppose fixe le centre de gravité; la vitesse instantanée de rotation est inversement proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre sur ce plan tangent.

Et d'autres théorèmes analogues à ceux de M. Poinsot.

Calcul infinitésimal.

S. Spitzer, à Vienne (p. 78-80). *Note sur l'équation différentielle de la série hypergéométrie.*

Cette équation, qu'on doit à Gauss, est

$$x(1-x)y'' + [y - (\alpha + \beta + n)\pi]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Dans le t. LVI (p. 149) de Crelle, M. Heine a donné l'intégrale de cette équation, trouvée dans les papiers laissés par Jacobi. M. Spitzer s'occupe de l'intégration dans le cas spécial où $\alpha = \beta$, et trouve

$$y = C_1 \int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha}\,du$$

$$+ C_2 \int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(\pi-x)^{-\alpha}\log\frac{u(1-u)}{x-u}\,du,$$

et ne fait que vérifier cette intégrale par différentiation.

Dans une Note additive, M. Borchardt montre qu'on peut déduire facilement le cas particulier de la solution générale.

S. Spitzer, à Vienne (p. 82-87). *Sur l'intégration de l'équation différentielle*

$$x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \pm y,$$

par des intégrales déterminées.

Kummer a donné l'intégrale des équations de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y,$$

m étant entier et positif. (Crelle, t. XIX.)

M. Spitzer, en suivant à peu près la même marche, ramène à des intégrales déterminées l'intégration de l'équation

$$x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \varepsilon y;$$

m entier positif $> 2n$ et $\varepsilon = \pm 1$.

Supposons qu'on sache trouver l'intégrale de l'équation

$$x^{m+1} \frac{dz^{n+1}}{dx^{n+1}} = \varepsilon z,$$

et qu'on ait

$$z = \psi(x);$$

$\psi(x)$ renfermant $n+1$ constantes arbitraires; on aura pour intégrale de l'équation $x^m \frac{d^n y}{dx^n} = -\varepsilon y$,

$$y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi\left(\frac{u}{x}\right) du,$$

et entre les $n+1$ constantes, il existe une relation qui les réduit à n constantes.

Exemple. L'intégrale de l'équation $x^{2n+2}\dfrac{dz^{n+1}}{dx^{n+1}} = z$ est

$$z = x^n\left(C_1 e^{-\frac{\mu_1}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2}{x}} + \ldots + C_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1}}{x}}\right),$$

où les μ sont les racines de $\mu^{n+1} = 1$.

Alors on a pour intégrale de $x^{2n+1}\dfrac{dy^n}{dx^n} = -y$,

$$y = x^n \int_0^\infty u^n e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}}$$

$$\times\left(C_1 e^{-\frac{\mu_1 u}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 u}{x}} + \ldots + C_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1} u}{x}}\right),$$

où

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_{n+1} = 0.$$

Géométrie.

DE STAUDT (Erlangen) (p. 88 et 89). Quelques propositions de Géométrie.

(Voir *Journal.*)

Arithmologie.

OETTINGER (Fribourg. Brisgau) (p. 90). Deux théorèmes. (Voir *Journal.*)

Mélanges.

BORCHARDT, rédacteur (p. 91 et 92). *Sur Pierre-Gustave Lejeune-Dirichlet.*

Le 6 mai de cette année (1859), les sciences naturelles ont fait une perte immense dans la personne de M. de Humboldt, et les sciences exactes, la veille, dans la personne de Dirichlet. L'illustre analyste est né le 13 février 1805, à Düren, près Aix-la-Chapelle, alors du département de la Roër. Le premier il a établi un passage entre le *continu* et le *discontinu* numérique, et a pour ainsi dire jeté un pont entre le monde infinité-

simal et le monde arithmétique : c'est sa découverte capitale, et qui léguera son nom aux générations de l'avenir. Esprit profondément pénétrant, d'une logique consciencieusement sévère, notre ancien compatriote s'est attaché aux parties les plus ardues de l'ardue théorie des nombres; trente-six Mémoires sont insérés dans le recueil de l'Académie de Berlin, dans les journaux de Crelle et de Liouville. Il avait encore de grands projets en vue; mais travaillant presque toujours de tête, et jetant au plus quelques calculs intermédiaires sur des feuillets volants, on n'a malheureusement rien trouvé dans ses papiers, sinon un travail concernant l'hydrodynamique, et dont on peut espérer une prochaine publication.

Outre un génie créateur, Dirichlet possédait des qualités professorales tellement éminentes, qu'elles ont exercé une influence considérable sur les progrès mathématiques en Allemagne. Les Leçons *sur la théorie des nombres, sur les forces agissant en raison inverse des carrés des distances, sur les équations aux différences partielles linéaires, sur les intégrales déterminées*, leçons imprimées sur des copies soignées, formeront le meilleur traité sur ces matières.

Il n'a pas laissé d'ouvrages, mais on peut considérer comme tels, et des meilleurs, des disciples comme feu Eisenstein et Borchardt.

Sa femme, objet d'une vive affection, l'ayant précédé de quelques mois, hâta la catastrophe. Petite-fille du philosophe Mendelsohn, sœur du compositeur de ce nom, épouse du géomètre, elle s'est toujours montrée digne de cette triple illustration; brillante tiare.

M. B. Tortolini a exprimé d'éloquents regrets sur cette mort prématurée (*Annali*, n° 3, 1859; p. 196), et a rappelé le séjour que fit Dirichlet à Rome, d'octobre 1843 à avril 1844, avec toute sa famille, alors composée de sa

femme et de deux petits garçons. Il était accompagné de ses deux amis Jacobi et Steiner, et de son élève Borchardt. Jacobi comparait le génie de Dirichlet à celui de Lagrange: même lucidité, même profondeur, même intensité, mêmes tendances arithmologiques. Il a été admis comme précepteur dans la famille du général Foy, à Paris. Aimant la France de prédilection, il m'a témoigné le désir d'y obtenir une chaire; désir non réalisable. Toutefois Colbert considérait l'acquisition d'illustres étrangers comme une riche importation. C'est à cette idée grandement patriotique que nous devons Cassini, Maraldi. — *Utinam! sapienti sat.*

EXERCICE D'ANALYSE NUMÉRIQUE, Extraits, Commentaires et Recherches, relatifs à l'analyse indéterminée et à la théorie des nombres; par *V.-A. Le Besgue,* Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, membre correspondant de l'Institut. Paris, 1859. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 3 francs.

La science des nombres n'est pas tout entière dans l'arithmétique, c'est-à-dire dans les procédés des calculs; elle comprend encore et surtout l'arithmologie, ou théorie des nombres, dont les ouvrages élémentaires ne peuvent parler que d'une manière accessoire. Ainsi, l'élève qui explique la divisibilité d'un nombre par 9 ou par 11, fait de l'arithmologie sans le savoir; mais cette science, si peu répandue, n'en est pas moins une des plus élevées et des plus attrayantes pour les esprits supérieurs.

L'arithmologie est bien ancienne; on doit la faire remonter à Pythagore, et même plus loin. A la vérité, notre siècle est trop positif pour adopter les idées mystiques dont s'inspirait l'antiquité; mais plusieurs illustres mathématiciens s'y sont livrés avec une ardeur qui semblait

s'accroître par les difficultés toutes particulières à ce genre d'études.

Cependant il n'existait pas de traité qui résumât la science avec méthode et qui complétât ces deux grands monuments, la *Théorie des nombres* et les *Recherches arithmétiques*, au moyen des matériaux épars dans une foule de Mémoires dus à différents auteurs. C'est ce qu'a tenté avec courage et bonheur M. Le Besgue, déjà connu lui-même par de beaux travaux d'arithmologie, et l'ouvrage qu'il publie sous le titre modeste d'*Exercices*, n'est autre chose que la première partie du traité que réclamait le monde savant.

Dans la première section, intitulée *Observations préliminaires*, l'auteur rappelle que deux nombres sont *congrus* entre eux relativement à un *module*, c'est-à-dire à un nombre quelconque, lorsque la différence de ces deux nombres est divisible par ce module. Il expose ensuite divers théorèmes sur les permutations, les nombres figurés, etc.

La deuxième section contient l'analyse indéterminée du premier degré, traitée d'une manière complète. On y trouve une foule de développements importants, que ne renferme aucun des traités ordinaires d'algèbre; par exemple, les règles de Paoli et de M. Hermite pour le nombre de solutions positives. Chemin faisant, l'auteur expose la théorie du plus grand commun diviseur et plusieurs théorèmes sur les nombres premiers.

La dernière section porte le titre d'*Applications*, parce qu'elle montre les conséquences de ce qui a déjà été vu sur les congruences et les nombres premiers, mais elle contient, en réalité, des développements théoriques aussi intéressants que variés. On y remarque la décomposition des nombres en carrés et bicarrés, ainsi que différents théorèmes sur les nombres premiers, et notamment celui

de Wilson, qui caractérise ces nombres. Enfin, l'auteur signale l'usage que l'on fait, depuis Gauss, des nombres complexes imaginaires formés des racines de l'unité, et montre aussi l'emploi des séries divergentes.

S'il se présente, comme nous l'espérons pour l'honneur de la science, un nombre suffisant de souscripteurs, M. Le Besgue achèvera par parties détachées, mais complètes, la publication de son beau travail, dont cette brochure de 150 pages forme à peu près le tiers.

Nous devons louer chez M. Le Besgue, outre la précision et la clarté du style, une réserve bien nécessaire dans des questions aussi délicates. Quand une démonstration lui paraît obscure ou insuffisante, il le dit franchement. Il doute, à plus forte raison, des théorèmes énoncés sans démonstration, surtout dans la mystérieuse théorie des nombres premiers. Par exemple, est-il vrai, comme on l'a dit, qu'au delà de toute limite donnée, on trouve deux nombres impairs consécutifs et premiers? Est-il vrai que tout nombre pair soit la somme de deux nombres premiers? C'est probable, mais ce n'est pas certain.

Une pareille prudence n'est que trop justifiée dans l'étude de l'arithmologie. On sait qu'Euler a montré la fausseté d'un théorème de Fermat, qui avouait, à la vérité, ne pas en avoir la démonstration. On sait aussi que la *Théorie des Nombres*, de Legendre, contient quelques théorèmes inexacts. En un mot, c'est dans cette science, plus que dans toute autre, qu'il ne faut rien affirmer sans preuve, pas même le fameux théorème de Fermat, que l'Académie des Sciences remet tous les ans au concours.

Pour faire la part de la critique, nous désirerions chez M. Le Besgue des indications un peu plus précises sur les sources auxquelles il a puisé. Ainsi, nous voyons bien

que le théorème énoncé par Fermat sur les nombres figurés a été démontré par Cauchy; mais quelle est cette démonstration, ou, du moins, dans quel Mémoire se trouve-t-elle? Peut-être, du reste, l'auteur se propose-t-il de compléter ces indications dans les publications successives.

Nous voudrions donc voir compléter cet ouvrage, d'autant plus indispensable que ceux de Gauss et de Legendre, déjà épuisés, ne sont plus au courant de la science, et nous unissons nos vœux à ceux de M. Le Besgue, pour que de nombreux souscripteurs lui permettent, par une modique offrande, d'achever l'édifice qu'il a si bien commencé.

Ch. Housel,
Professeur.

Traité des surfaces du second ordre et développements de géométrie analytique a trois dimensions, à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale; par M. *Saint-Loup*, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Strasbourg, et M. *Bach*, chargé du cours de mathématiques pures à la Faculté de Strasbourg, chevalier de la Légion d'honneur. Paris, 1859; in-8° de 96 pages avec planche. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 3 francs.

Ce Traité contient, en moins de 100 pages, toutes les connaissances exigées par les Programmes, et même au delà. La méthode fort simple exposée au début de l'ouvrage pour la classification des surfaces est contenue en principe dans un Mémoire de M. Finck (*Journal* de Liouville, 1838). Si les auteurs ne l'ont pas cité, c'est sans doute parce que cette méthode, que M. Finck lui-même attribue à M. Plücker, revient à décomposer en carrés l'équation de la surface, idée qui est aujourd'hui tombée dans le domaine public.

Malgré le peu d'étendue de l'ouvrage, les auteurs ne

négligent pas les exemples numériques; enfin ils ajoutent quelques considérations sur des surfaces d'un degré supérieur au second, telles que le tore et la surface de l'onde.

Du reste, l'ouvrage est écrit avec autant de clarté que de précision, et nous pensons qu'il peut être mis avec avantage entre les mains des élèves. CH. HOUSEL,

Professeur.

RÉSUMÉ DE LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET DE CALCUL INFINITÉSIMAL; ETC.; par *J.-B. Belanger*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur de mécanique à l'École Polytechnique. In-8 de 296 pages avec planches. Paris, 1859. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 6 francs.

Nous ne saurions recommander avec trop d'instance cette instructive production aux professeurs enseignants et aux jeunes étudiants. On y trouve ce qu'il est indispensable d'apprendre, et le savant auteur possède le talent excessivement rare de savoir ce qu'il ne faut pas dire. Des exemples numériques, choisis avec sagacité, éclaircissent les théories abstraites. La trigonométrie est présentée comme science de *rapports;* idée émise dans le *Manuel de Géométrie* (Roret). On regrette que, se conformant à l'usage, l'auteur n'ait pas adopté la division décimale du cercle. Trois professions repoussent très-illégalement cette division : les bladiers, les négociants en vins et les astronomes. A Paris le blé se vend par 150 litres et la farine par 157 kilogrammes; mêmes variations dans d'autres marchés. Dans la Côte-d'Or, il y a des tonneaux de 456, 114, 57 litres. On ignore pourquoi les astronomes ont abandonné le système décimal admis par Laplace, Borda, Legendre. On prêche l'adoption de ce système : l'exemple est la meilleure des prédications.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME V.)

Analyse algébrique.

Arithmologie.

Analyse des formes.

Analyse fonctionnelle.

Calcul infinitésimal.

Géométrie.

Mécanique.

Bibliographie.

Historique et Biographie.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

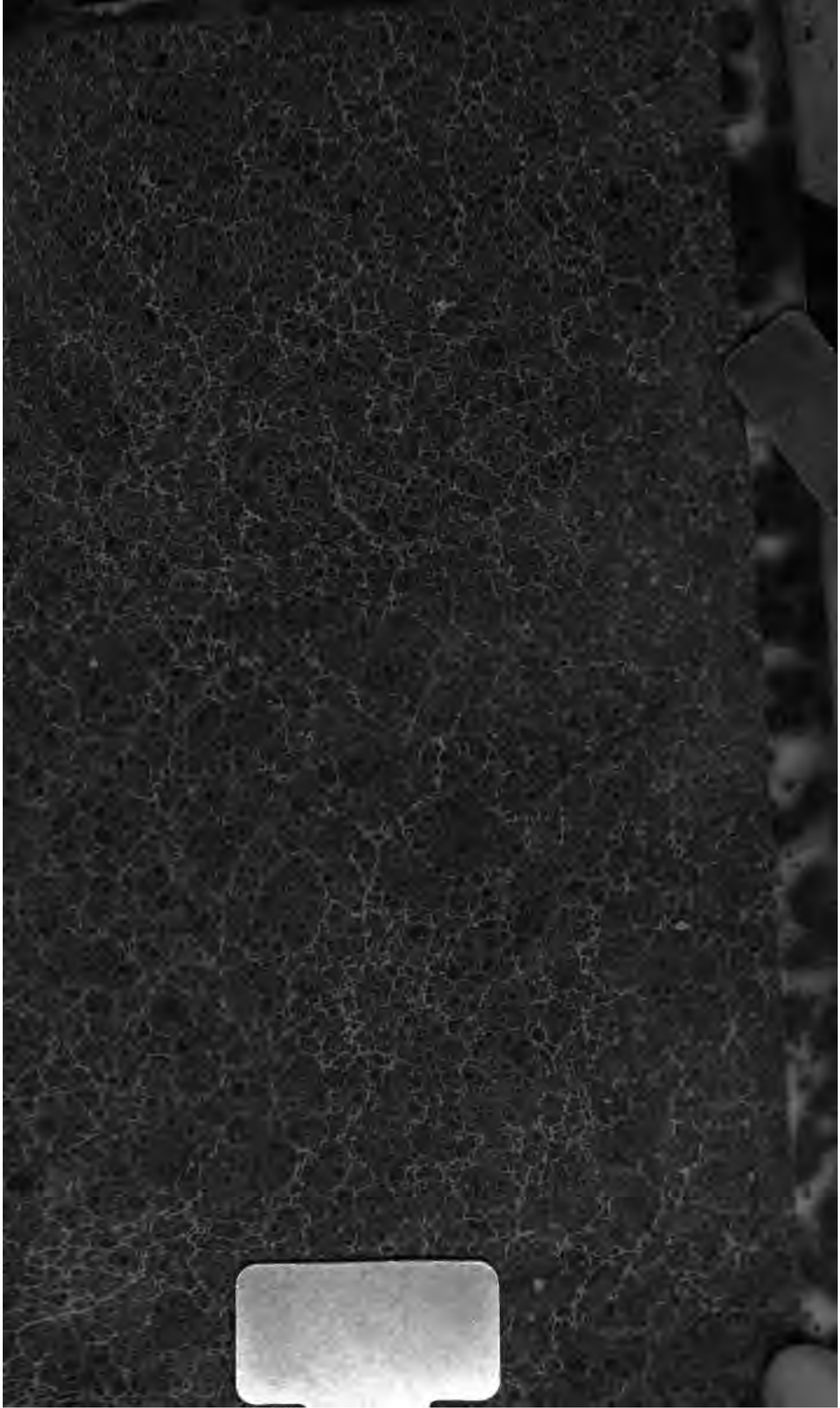
(Les noms des Collaboratenrs sont précédés d'un astérisque.)

DEMANDE.

Où trouve-t-on des renseignements *biographiques* sur le géomètre hollandais Abraham Cufuëler, auteur du *Specimen artis ratiocinandi*, in-12; Hamburgi, 1684; ouvrage philosophique raisonné avec une conscience mathématique? La traduction serait encore utile, aujourd'hui, comme antidote au panthéisme matérialiste.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.






3 2044 102 935 160